



# Chaos im Planetensystem

Bertram Bitsch & Wilhelm Kley

## Motivation

Die Studenten sollen den Umgang mit numerischen Simulationen anhand des  $N$ -Körper-Problems erlernen. Als  $N$ -Körper-Problem bezeichnet man die Dynamik von  $N$  Punktteilchen unter dem Einfluss einer paarweise wirkenden Kraft. Beim klassischen  $N$ -Körper-Problem wirkt die Newtonsche Gravitationskraft zwischen Punktmassen. Diese Beschreibung ist hinreichend zum Verständnis der Struktur und Entwicklung verschiedener astrophysikalischer Systeme, z.B. Planetensysteme ( $N \approx 10$ ), Sternhaufen ( $N \approx 10^4 \dots 10^6$ ) oder Galaxien ( $N \approx 10^8$ ). Lediglich das Zwei-Körper-Problem  $N = 2$  ist analytisch lösbar. Für  $N \geq 2$  soll das System der  $2N$  gewöhnlichen Differentialgleichungen mit gegebenen Anfangswerten numerisch integriert werden. Zunächst soll das 2-Körper-Problem numerisch integriert werden, um den entwickelten Code zu testen. Anschließend soll mit dem Code das Chaos innerhalb eines Drei-Körper-Problems simuliert werden. Dabei sind verschiedene Integratoren zu implementieren, welche eine unterschiedliche Genauigkeit haben.

## Lernziele

- Veranschaulichung des Zwei-Körper-Problems
- Runge-Lenz-Vektor, Exzentrizität, große Halbachse
- Numerische Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen
- Güte der Integratoren
- Erfahrungen mit Programmiersprachen
- Stabilitätsuntersuchung für das koplanare Drei-Körper-Problem

## Integratoren

Beim  $N$ -Körper-Problem wird die Zeitintegration für die Geschwindigkeit und für den Ort der Teilchen durchgeführt. Das einfache **Euler-Verfahren** liefert dazu für das jeweilige Teilchen die Gleichungen

$$v_{n+1} = v_n + a_n \Delta t, \quad r_{n+1} = r_n + v_n \Delta t,$$

wobei die Beschleunigung  $a_n$  durch

$$a_i(t) = \sum_{j \neq i}^N G m_j \frac{r_{ij}}{r_{ij}^3}$$

gegeben ist. Der Index  $n$  stellt dabei den entsprechenden Zeitschritt dar. Das Euler-Verfahren ist dabei sehr ungenau. Sollen etwa die Teilchenbahnen für einen Zeitraum  $t_{max}$  bestimmt werden, wobei jeder Zeitschritt die Länge  $\Delta t$  haben soll, so sind  $N_t = \frac{t_{max}}{\Delta t}$  Zeitschritte notwendig. Die Genauigkeit pro Zeitschritt ist von der Ordnung  $O(\Delta t^2)$ , so dass der Gesamtfehler der Simulation von der Ordnung  $O(N_t \Delta t^2) = O(\Delta t)$  ist, was für aufwändigere Simulationen mit vielen Teilchen auf keinen Fall genutzt werden sollte.

Eine Verbesserung des Euler-Verfahrens besteht darin, die Geschwindigkeit für die Berechnung des nächsten Ortes nicht zu den Zeiten  $t_n$  oder  $t_{n+1}$  zu nehmen, sondern zum Zeitpunkt  $t_{n+1/2} = t_n + \Delta t/2$ .

Das Schema des **Leap-Frog** Verfahren lautet:  
Anfangszeitpunkt:

$$r_{1/2} = r_0 + v_0 \frac{\Delta t}{2}$$

Reguläre Zeitschritte:

$$v_{n+1} = v_n + a_{n+1/2} \Delta t, \quad r_{n+3/2} = r_{n+1/2} + v_{n+1} \Delta t,$$

Letzter Zeitschritt:

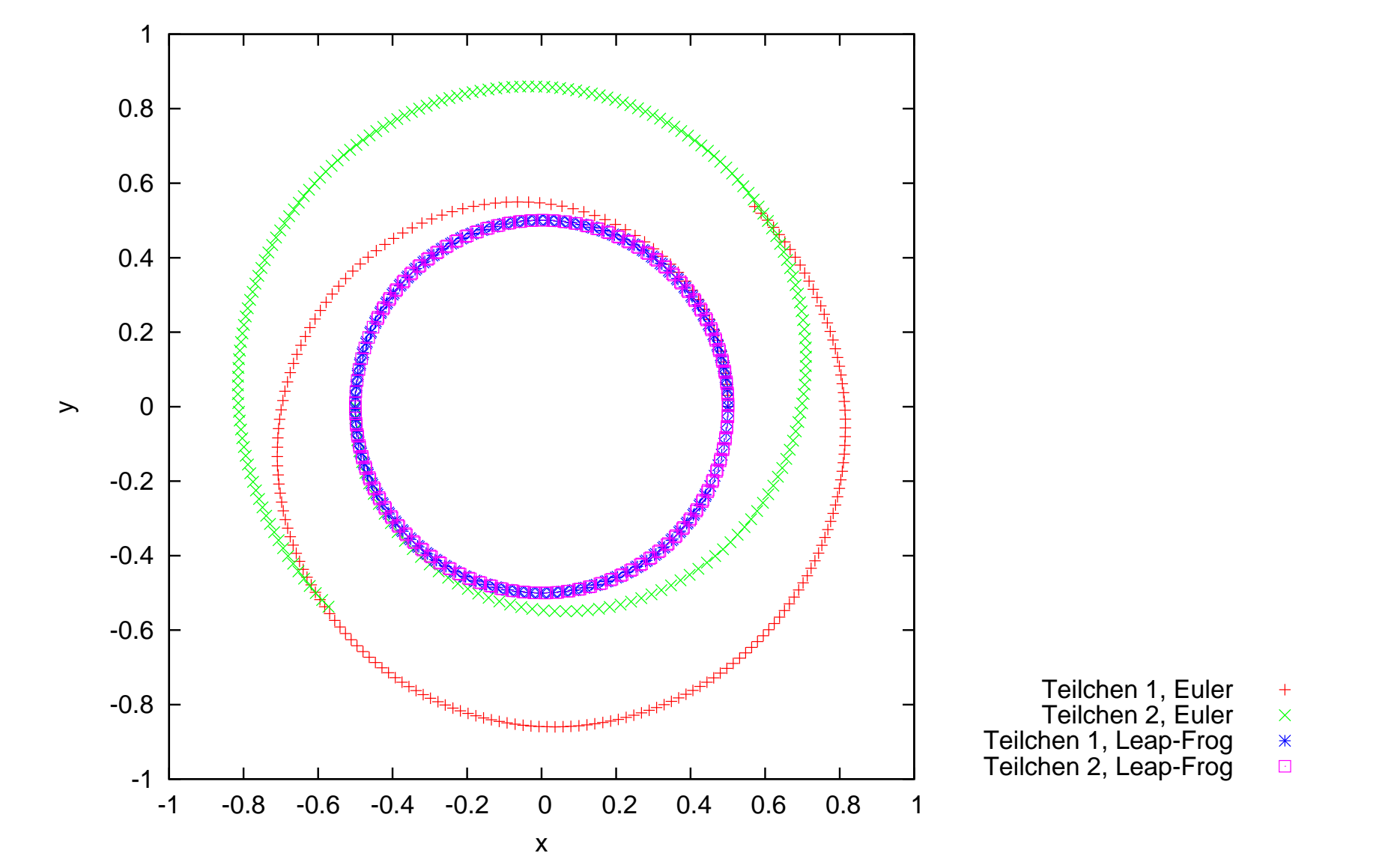
$$r_{n+1} = r_{n+1/2} + v_{n+1} \frac{\Delta t}{2},$$

wobei  $a_{1/2} = a(t_{1/2}, r_{1/2})$  darstellt.

Der Name **Leap-Frog** für diesen Zeitintegrator rührt von der um jeweils eine halbe Zeitschritteinheit  $\Delta t$  voneinander entfernten Berechnung des Ortes und der Geschwindigkeit her, die Berechnungzeitpunkte springen auf der Zeitachse jeweils übereinander hinweg. Ort und Geschwindigkeit sind also während der Rechnung nicht gleichzeitig bekannt. Im Grenzübergang  $\Delta t \rightarrow 0$  erhält man die üblichen kanonischen Gleichungen, d.h. für endlichen  $\Delta t$  ist dieser Integrator symplektisch: es gibt eine Hamiltonfunktion für welche die Leap Frog Lösung korrekt ist. Das wirkt sich positiv auf die Konstanz der Erhaltungsgrößen aus.

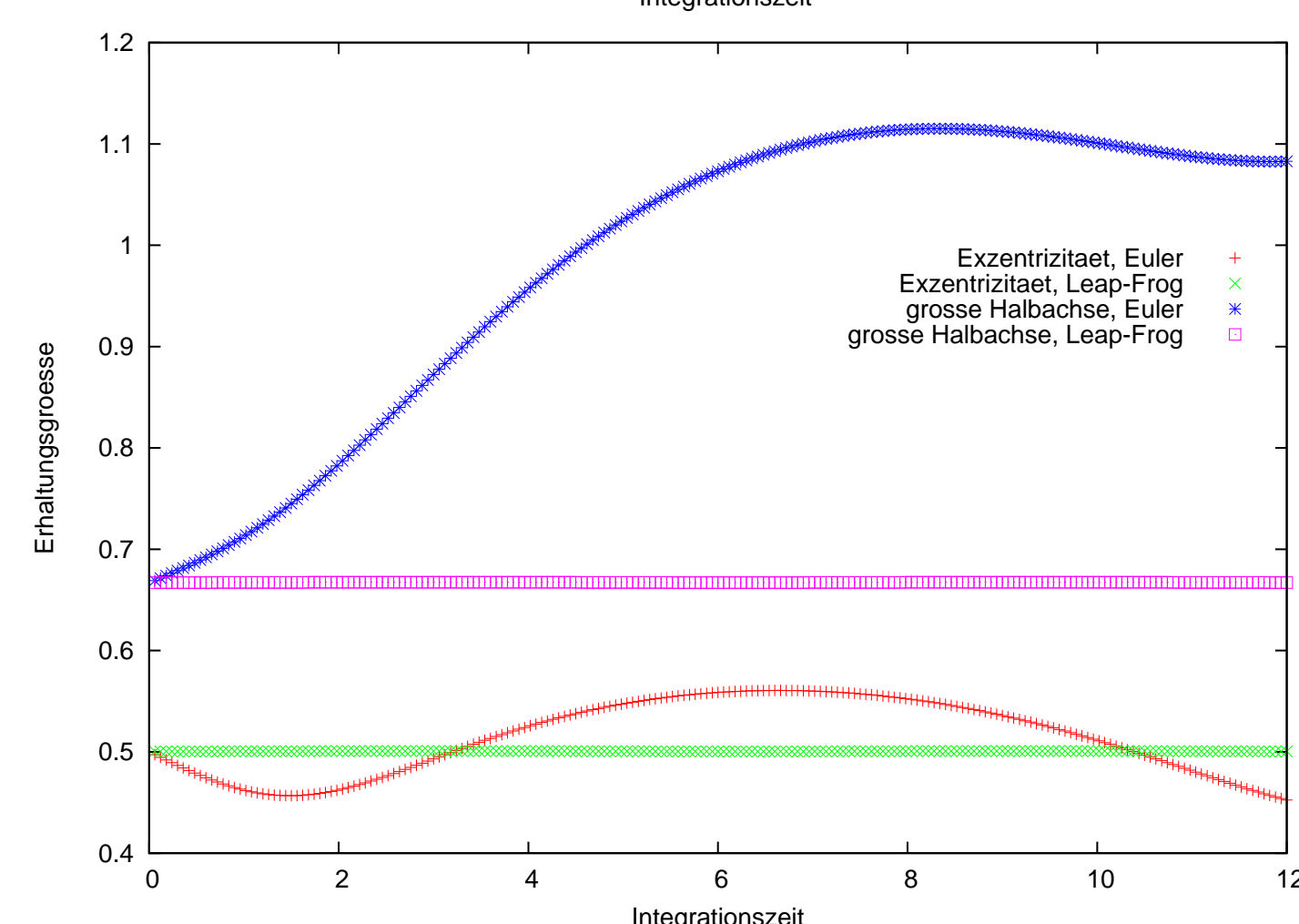
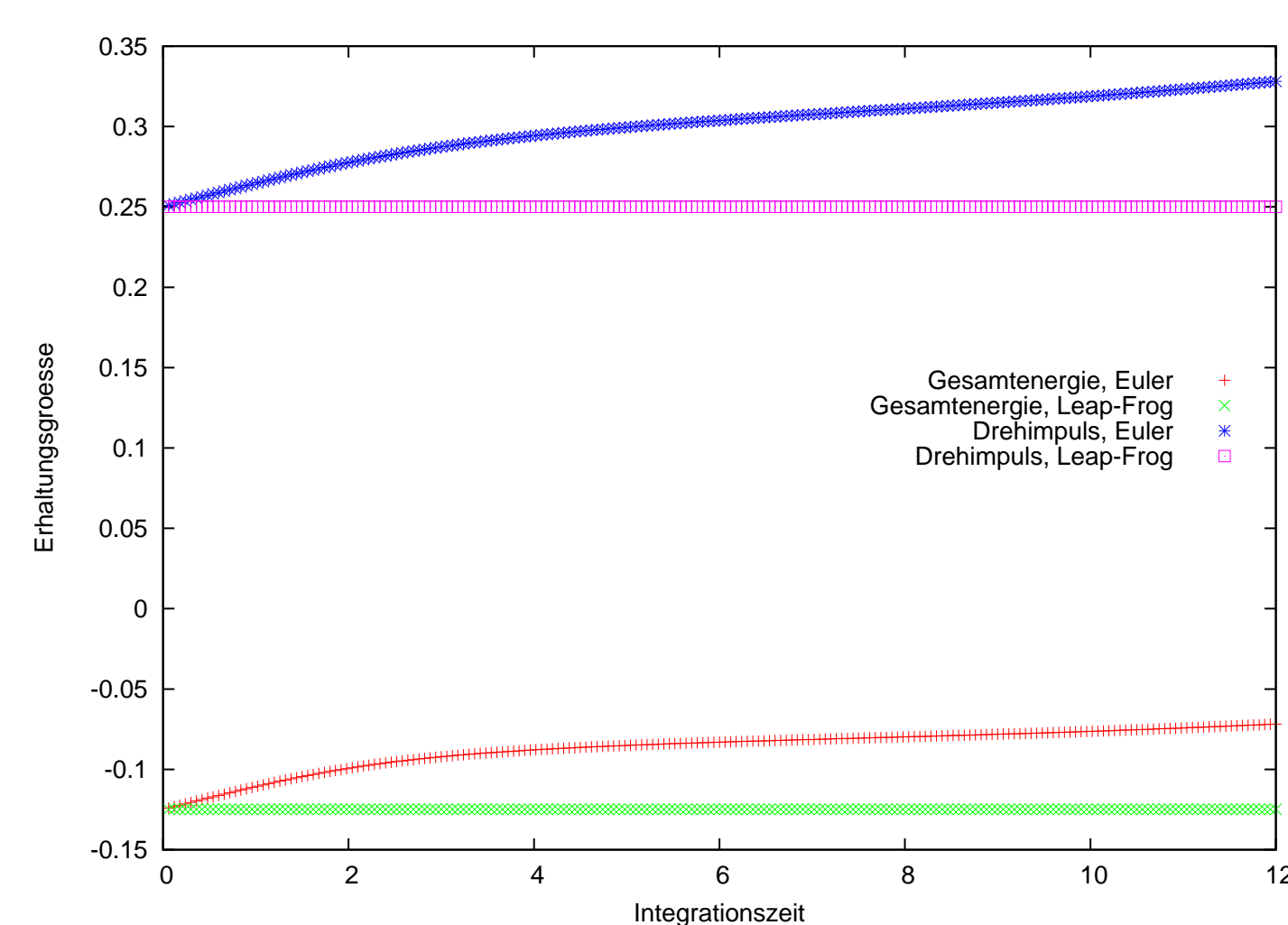
## Zweikörperproblem Test: Euler vs. Leap-Frog

Man erkennt sofort den Unterschied zwischen beiden Integratoren. Während der Euler-Integrator schon nach einem Umlauf der Planeten um den gemeinsamen Schwerpunkt sehr starke Abweichungen zeigt, ist der Leap-Frog-Integrator stabil.



## Erhaltungsgrößen

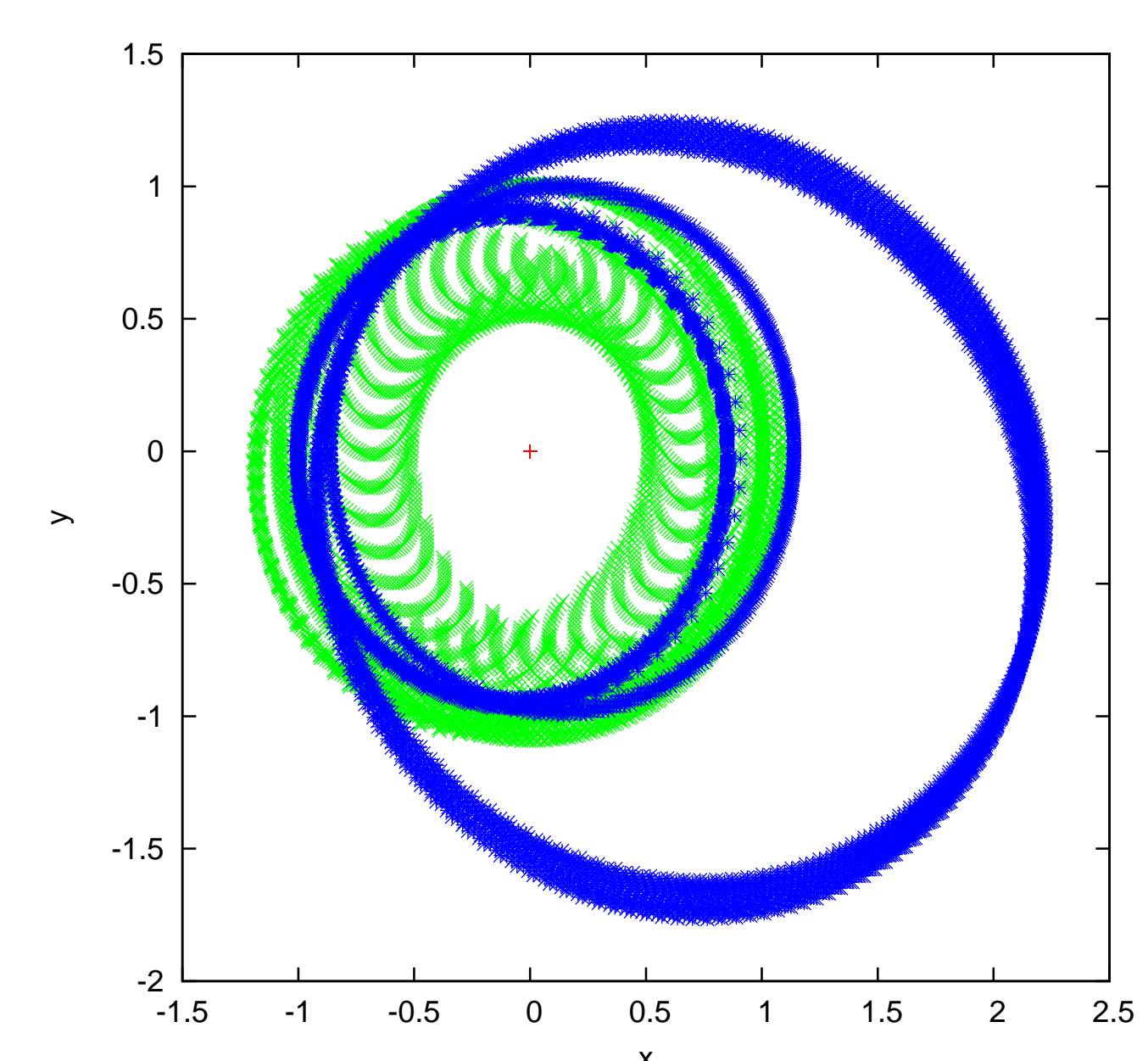
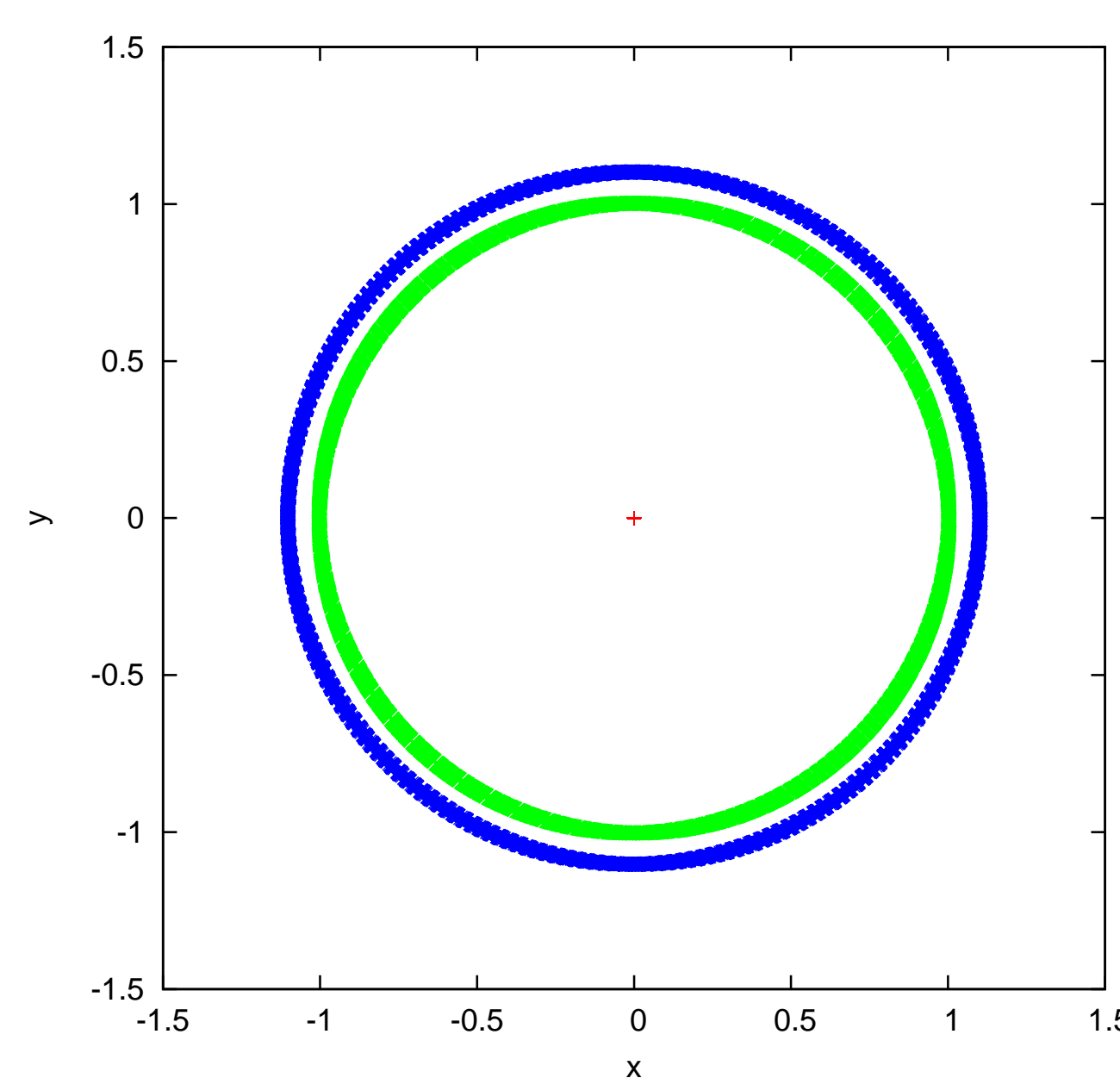
Betrachtet man die Erhaltungsgrößen, so erkennt man ebenfalls einen großen Unterschied zwischen den beiden gewählten Integratoren. Der Euler-Integrator liefert sehr schlechte Ergebnisse: Energie und Drehimpuls sind nicht erhalten, wie es aufgrund der großen Abweichungen von den realen Planetenbahnen zu erwarten war. Im Gegensatz dazu zeigt sich auch hier der Leap-Frog-Integrator sehr vorteilhaft.



## Dreikörperproblem

Wir sehen hier im Bild die Planetenbewegung von zwei Trabanten um eine große zentrale Masse. Man erkennt für die gewählte Anfangskonfiguration eine stabile Planetenbewegung um die Zentralmasse (Stern).

Kleine Änderungen in den Anfangsdaten können zu chaotischen Veränderungen in den Endergebnissen führen. Hier wurde der Abstand der beiden Trabanten nur ein klein wenig verändert, was schon große Auswirkungen auf die Endergebnisse hat.



## Zusammenfassung

Die Studenten sollen in diesem Versuch grundlegende Kenntnisse des Programmierens erlernen. Auch soll Ihnen nahegebracht werden, dass kleine Änderungen der Anfangsbedingungen in Differentialgleichungen große Auswirkungen auf das Ergebnis haben können. Dabei spielt bei der numerischen Lösung von Differentialgleichungen der Integrator eine wichtige Rolle, die bei einer falschen Wahl zu unerwünschten Ergebnissen führen kann.