Mathematische Logik I — WS 2016/17

Übungsblatt 12 — **Abgabe am 27.1.** — **T. Piecha**

Aufgabe 1 (9 Punkte)
Beweisen Sie für beliebige $\mathscr{L}$-Formeln φ und Variablen x, y:

(a) $\exists x\varphi \mathrel{=\!\!|\!\models} \neg\forall x\neg\varphi$ (4 Punkte)

(b) $\forall x\forall y\varphi \mathrel{=\!\!|\!\models} \forall y\forall x\varphi$ (2 Punkte)

(c) $\exists x\forall y\varphi \models \forall y\exists x\varphi$ (2 Punkte)

Zeigen Sie außerdem $\forall x\exists y\varphi \not\models \exists y\forall x\varphi$ (durch Angabe eine geeigneten Struktur $\mathfrak{A}$ und einer geeigneten Formel φ). (1 Punkt)

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Es seien φ, ψ beliebige $\mathscr{L}$-Formeln, und es sei x eine Variable, so dass $x \notin \mathrm{FV}(\varphi)$.
Beweisen Sie die folgenden logischen Äquivalenzen:

(a) $\exists x(\varphi \to \psi) \mathrel{=\!\!|\!\models} (\varphi \to \exists x\psi)$ (3 Punkte)

(b) $\forall x(\psi \to \varphi) \mathrel{=\!\!|\!\models} (\exists x\psi \to \varphi)$ (3 Punkte)

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Formen Sie die Formel

$$\neg\big((\forall x\varphi(x) \to (\forall y\psi(y) \to \exists x\varphi(x))) \to \forall x\exists y\sigma(x, y)\big)$$

schrittweise in eine logisch äquivalente pränexe Normalform um. (Die Teilformeln φ, ψ und σ seien quantorenfrei.)