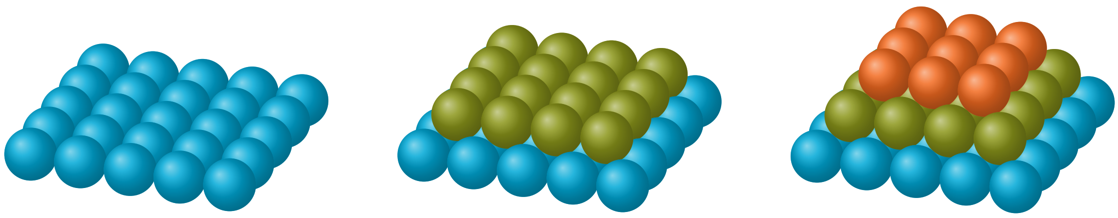
Tag der Mathematik 2025

Gruppenwettbewerb
Einzelwettbewerb
Mathematische Hürden

Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe G1

Kugeln werden auf dem Tisch zu einem quadratischen Muster (blau) ausgelegt. Eine zweite Schicht (grün) legt man versetzt darüber und verfährt analog für jede weitere Schicht.



Wenn das Startquadrat aus $n \times n$ Kugeln besteht, besteht die n-te Schicht aus einer Kugel und wir erhalten eine Pyramide.

Sei $Q(n)$ die Anzahl der Kugeln in solch einer Pyramide.

a) Bestimmen Sie $Q(n)$ für $n = 1,2,3,4$ und finden Sie eine Rekursionsformel für $Q(n)$.

   (Hinweis: Eine Rekursionsformel zeigt, wie man $Q(n)$ aus $Q(n-1)$ erhält.)

b) Finden Sie Zahlen p, q, r, sodass für $n = 1,2,3,4$ gilt:

$$Q(n) = pn^3 + qn^2 + rn.$$

c) Tatsächlich gilt die in Aufgabenteil b) genannte Formel für alle $n \in \mathbb{N}$.

   Zeigen Sie: Wenn die Formel $Q(n)$ aus b) für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann gilt auch $Q(n+1)$ für den Nachfolger $n+1$.

Lösung

a) Es ist

$$\begin{aligned} Q(1) &= 1^2 = 1 \\ Q(2) &= 1^2 + 2^2 = 5 \\ Q(3) &= 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 \\ Q(4) &= Q(3) + 4^2 = 30. \end{aligned}$$

Für die Rekursionsformel ergibt sich

$$Q(n) = Q(n-1) + n^2.$$

b) Nach a) erhält man unter Annahme von b) ein lineares Gleichungssystem für die gesuchten Parameter.

$$\begin{aligned}
p+q+r &= 1 && && Q(1) \rightsquigarrow (1)\\
8p+4q+2r &= 5 && && Q(2) \rightsquigarrow (2)\\
27p+9q+3r &= 14 && && Q(3) \rightsquigarrow (3)\\
6p+2q &= 3 && && (2)\text{-}2\cdot(1)=(4)\\
24p+6q &= 11 && && (3)\text{-}3\cdot(1)=(5)\\
6p &= 2 && \Rightarrow p=\tfrac{1}{3} && (5)\text{-}3\cdot(4)=(6)\\
2q &= 3-2 && \Rightarrow q=\tfrac{1}{2} && (6)\rightsquigarrow(4)=(7)\\
r &= 1-p-q=\tfrac{1}{6} && && (6),(7)\rightsquigarrow(1)=(8)
\end{aligned}$$

Zur Überprüfung wird noch $Q(4)$ anhand dieser p,q,r berechnet:

$$Q(4) = \frac{4^3}{3} + \frac{4^2}{2} + \frac{4}{6} = \frac{64}{3} + 8 + \frac{2}{3} = 30.$$

c) Es gilt:

$$\begin{aligned}
Q(n+1) &= \frac{1}{3}(n+1)^3 + \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1)\\
&= \frac{1}{3}n^3 + n^2 + n + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}n^2 + n + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}n + \frac{1}{6}\\
&= Q(n) + n^2 + n + \frac{1}{3} + n + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\\
&= Q(n) + n^2 + 2n + 1 = Q(n) + (n+1)^2
\end{aligned}$$

Alternativlösung:

b)+c) Man zeigt, dass die Formel in b) mit den geeigneten Parametern für $n=1$ gilt und für alle $n>1$ die Rekursion

$$Q(n) = Q(n-1) + n^2$$

erfüllt. Die Parameter ergeben sich dabei aus dem Ansatz durch Koeffizientenvergleich.

$$\begin{aligned}
Q(n) &= pn^3 + qn^2 + rn \overset{!}{=} n^2 + Q(n-1)\\
&= n^2 + p(n-1)^3 + q(n-1)^2 + r(n-1)\\
&= n^2 + pn^3 - 3pn^2 + 3pn - p + qn^2 - 2qn + q + rn - r\\
&= pn^3 + (1-3p+q)n^2 + (3p-2q+r)n + (-p+q+r)
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich, damit die Formel für alle n gilt:

$$\begin{aligned}
p &= p & & & (n^3)\\
q &= (1-3p+q) & &\Rightarrow p = \tfrac{1}{3} & (n^2)\\
r &= (3p-2q+r) & &\Rightarrow q = \tfrac{3}{2}p = \tfrac{1}{2} & (n^1)\\
0 &= (-p+q-r) & &\Rightarrow r = q-p = \tfrac{1}{6} & (n^0)
\end{aligned}$$

Also erfüllt

$$Q(n) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

die Rekursionsformel.

Weiter gilt für $n = 1$:

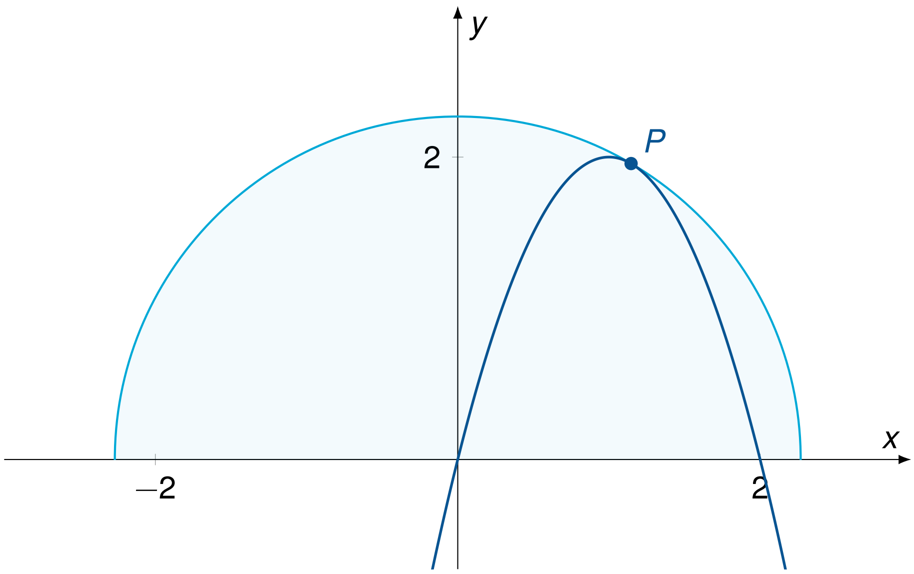
$$Q(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1.$$

Damit gilt die Formel für alle n.

Aufgabe G2

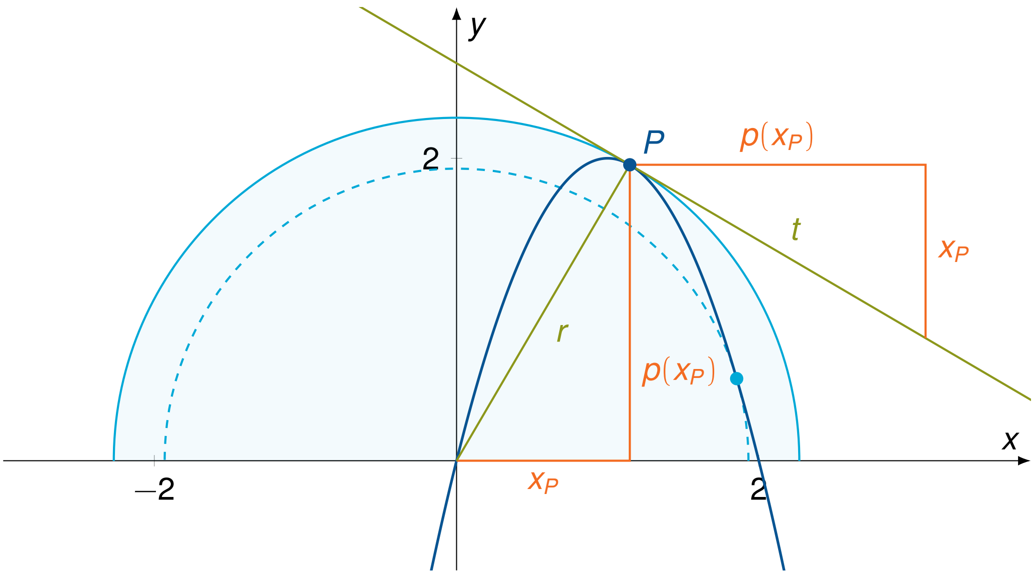
Im Bild ist eine auf nach unten geöffnete Parabel mit den Nullstellen $x = 0$, $x = 2$ und dem Maximalwert $y_{\text{max}} = 2$ dargestellt.

Sie berührt einen Halbkreis K um den Ursprung oberhalb der x-Achse von innen im Punkt P.



Berechnen Sie die x-Koordinate von P.

Lösung



Die Parabel mit den Nullstellen $x = 0$ und $x = 2$ und Scheitelpunkt bei $(x, y) = (1, 2)$ hat die Darstellung

$$p(x) = 2 - 2(x-1)^2 = -2x^2 + 4x.$$

Es gibt 2 berührende Kreise um den Ursprung. Ein Kreis (gestrichelt) berührt von innen, der gesuchte Kreis berührt von außen.

Im Berührpunkt P ist die Tangente t an den Graphen der Parabel auch Tangente an den Kreis und steht senkrecht auf dem Radius.

Daher gilt für die gesuchte Koordinate $x = x_P$:

$$\begin{aligned}
p'(x) &= -4x + 4 \\
&\overset{!}{=} -\frac{x}{p(x)} \\
&= -\frac{x}{-2x^2 + 4x} = \frac{1}{2x-4} \\
\Rightarrow 1 &= (-4x+4)(2x-4) = -8x^2 + 24x - 16 \\
\Rightarrow 0 &= x^2 - 3x + 2 + \frac{1}{8} = x^2 - 3x + \frac{17}{8} \\
x_{1,2} &= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\frac{17}{8}}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}}{2} = 1.5 \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Relevant ist die kleinere Lösung

$$x_P = 1{,}5 - \frac{1}{2\sqrt{2}} = 1{,}5 - \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (\approx 1{,}146446609).$$

(Die andere Lösung führt auf den gestrichelten Kreis.)

(**Bemerkung:** Die Aufgabe entstammt der Anwendung Tennishallen zu konzipieren.

Ein Tennisplatz muss eine Mindesthöhe h besitzen. Praktisch genügt es Hallen so zu bauen, dass Bälle die nicht höher als h fliegen nicht an der Decke anstoßen, es sei denn sie wären sowieso ins Aus gegangen. Daher genügt es, wenn Parabeln mit Maximalhöhe h, die von einem Feld ins andere gehen, nicht anstoßen. Kritisch ist dabei ein Lob vom Netz auf die gegnerische Grundlinie.)

Alternativlösung:

$$p(x) = 2 - 2(x-1)^2 = -2x^2 + 4x.$$

Der Berührpunkt ist der Punkt der Parabel oberhalb der x-Achse mit $x > 0$, mit dem größten Abstand A zum Ursprung, also ein lokales Maximum von

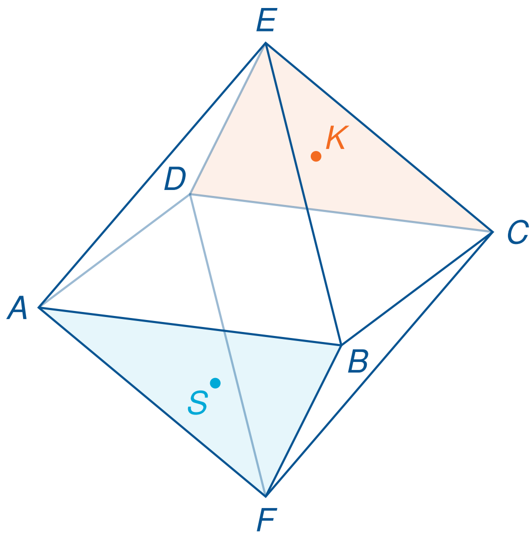
$$\begin{aligned}
f(x) &:= A^2 = x^2 + p(x)^2 \to \max \\
f(x) &= x^2 + (-2x^2 + 4x)^2 = 4x^4 - 16x^3 + 17x^2 \\
f'(x) &= 16x^3 - 48x^2 + 34x \stackrel{!}{=} 0 \\
&\Rightarrow x = 0 \text{ oder } 16x^2 - 48x + 34 = 0 \\
&\Rightarrow 0 = 8x^2 - 24x + 17 \\
\Rightarrow x_{1,2} &= \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 8 \cdot 17}}{16}
\end{aligned}$$

Gesucht ist dabei der Berührpunkt, der ein lokales Maximum des Abstandes ist, also

$$x = \frac{24 - \sqrt{24^2 - 4 \cdot 8 \cdot 17}}{16} = 1{,}5 - \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Aufgabe G3

Eine Spinne S sitzt außen auf einem durchsichtigen Oktaeder mit Kantenlänge 1, genau in der Mitte (Höhenschnittpunkt) der Dreiecksfläche $\triangle ABF$. Auf der gegenüberliegenden Dreiecksfläche $\triangle CDE$ (ebenfalls genau in der Mitte) entdeckt sie einen Käfer K als potentielle Beute.



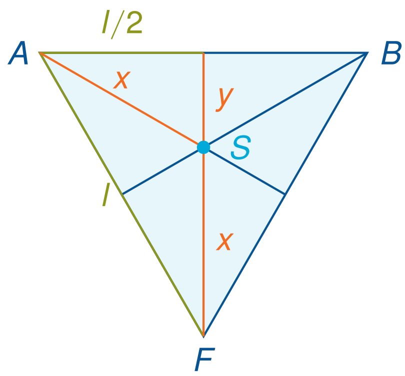
Wie lang ist der kürzeste Weg von der Spinne zur Beute entlang der Oktaederoberfläche?

(Hinweis 1: Im gleichseitigen Dreieck sind die Höhen auch Seitenhalbierende und teilen sich im Verhältnis 2:1.)

(Hinweis 2: Zeichnen Sie ein geeignetes Oktaedernetz.)

Lösung

Die Länge der Dreiecksseiten ist $l = 1$ und die Höhe $h = x + y$



wobei x die Länge des Höhenabschnitts von der Dreiecksecke bis zum Höhenschnittpunkt ist, dann gilt

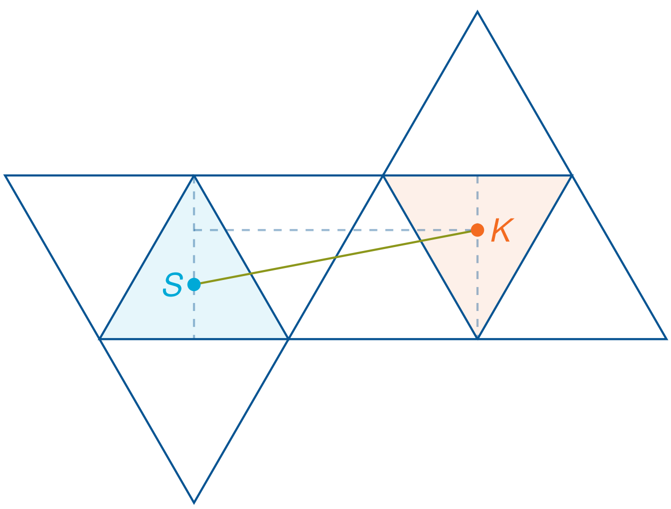
$$
\begin{aligned}
h^2 + \frac{l^2}{4} &= l^2 \\
\Rightarrow h^2 &= \frac{3}{4} l^2 \\
\Rightarrow h &= l\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

Der Abstand der Spinne zur den drei nächstgelegenen Kanten ist $y = \frac{h}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Der Abstand zu den 3 nächstgelegenen Eckpunkten beträgt $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Man schneidet die Oberfläche des Oktaeder entlang der Kanten auf, so dass man sie auf eine Ebene ausbreiten kann. Dabei schneidet man nur entlang von Kanten, die von der Spinne auf ihrem Weg zur Beute nicht überquert werden.

Dabei entsteht dann ein Oktaedernetz wie in der Abbildung.



Der Weg der Spinne wurde nicht zerschnitten und ist, als kürzester Weg, daher die gerade Verbindung von 2 Dreiecksmittelpunkten, die durch zwei weitere Dreiecke führt.

Legt man das Netz, so wie in der Abbildung, ist der horizontale Abstand von Spinne und Käfer gerade die 1,5-fache Dreiecksseitenlänge

und der vertikale Abstand $\frac{1}{3}$ der Höhe $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Für die Weglänge w erhält man:

$$w^2 = 1{,}5^2 + \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right]^2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{12} = \frac{7}{3}$$

$$w = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

Aufgabe G4

Für die vierstellige Zahl 6255 gilt: Addiert man zu der Zahl die Zahl, die man erhält, wenn man die Ziffern in umgekehrter Reihenfolge notiert, dann ist das Ergebnis durch 11 teilbar.

Es gilt nämlich:

$$6255 + 5526 = 11781 = 11 \cdot 1071$$

a) Zeigen Sie, dass dies für **jede** vierstellige Zahl Z gilt.

b) Gilt die Aussage auch für **jede** fünfstellige Zahl? (mit Begründung)

Lösung

a) Es gilt:

$$\begin{aligned} Z &= abcd = 1000a + 100b + 10c + d \\ S &= abcd + dcba = 1000a + 100b + 10c + d + 1000d + 100c + 10b + a \\ &= 1001(a+d) + 110(b+c) \\ &= 11 \cdot 91 \cdot (a+d) + 11 \cdot 10 \cdot (b+c) \\ \Rightarrow S &= 11 \cdot \left[91(a+d) + 10(b+c)\right] \end{aligned}$$

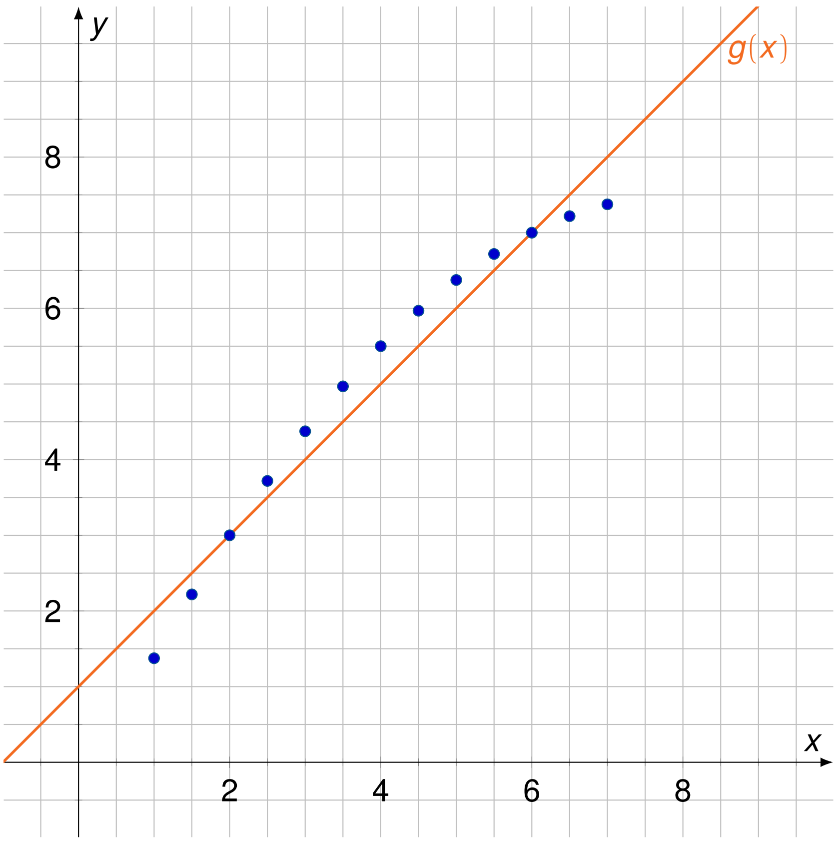
Also ist S durch 11 teilbar.

b) Für fünfstellige Zahlen gilt die Aussage nicht immer.

Zum Beispiel nicht für 11111,da 22222 geteilt durch 11 den Rest 2 besitzt.

Aufgabe E1

Die Messdaten (blaue Punkte) wurden durch eine lineare Modellfunktion $g(x)$ approximiert (orangefarbene Gerade).

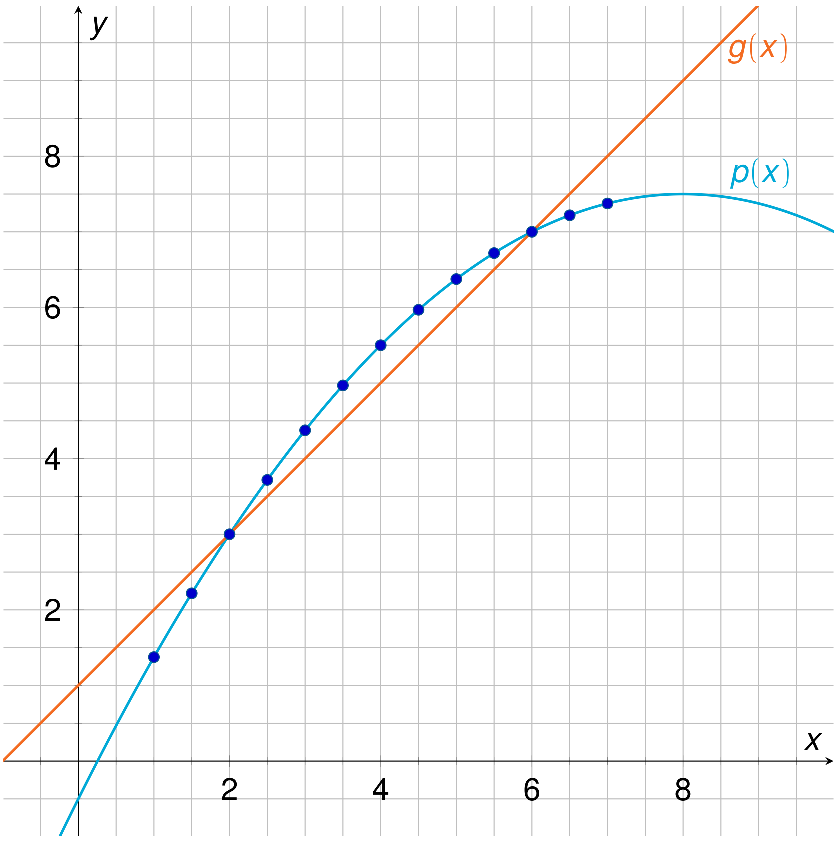


Zur Verbesserung des Modells soll nun eine Parabel p genauer an die Daten angepasst werden.

Geben Sie eine solche Parabel an.

(Hinweis: Nutzen Sie eine Darstellung von p, bei der die Parameter aus der Abbildung möglichst gut abgelesen werden können.)

Lösung



Von der Parabel $p(x)$ sind im Bereich der Daten zunächst keine charakteristischen Stellen (wie Achsenabschnitte oder Extremstellen) ablesbar. Wir verwenden daher die Darstellung

$$p(x) := g(x) + q(x) = a + mx + b(x - x_1)(x - x_2).$$

Die Parabel $q(x) := p(x) - g(x)$ hat Nullstellen bei $x_1 \approx 2$ und $x_2 \approx 6$, daraus ergibt sich

$$q(x) \approx b(x - 2)(x - 6).$$

Die Gerade g hat Steigung $m = 1$ und y-Achsenabschnitt $a = 1$, d.h.

$$g(x) = 1 + x.$$

Zur Bestimmung von b lesen wir den Wert von $q = p - g$ an einer Stelle ab. Besonders gut geht dies am Scheitelpunkt von q zwischen den beiden Nullstellen bei $x = 4$

$$\begin{aligned} q(4) &= (4-2)(4-6)b = -4b \approx 0{,}5 \Rightarrow b \approx -\frac{1}{8} \\ q(x) &\approx -\frac{1}{8}(x-2)(x-6) \\ \Rightarrow p(x) &= g(x) + q(x) \approx 1 + x + q(x) = 1 + x - 0{,}125(x-2)(x-6) \\ &= -0{,}125x^2 + 2x - 0{,}5. \end{aligned}$$

Alternativlösung:
Man wählt 3 Datenpunkte.

(Bemerkung: In der Praxis sollte man darauf achten, dass die Daten gut abgelesen werden können und möglichst den gesamten Datenbereich gut abdecken, damit Ablesefehler sich nicht so stark auswirken.)

Zum Beispiel $(x;y) = (2;3),(4;5{,}5),(6;7)$ (oder $(x;y) = (1;1{,}4),(4;5{,}5),(7;7{,}9)$). Durch diese drei Daten legt man exakt eine Parabel in einer Darstellung fest, die in den Parametern linear ist, wie etwa

$$p(x) = ax^2 + bx + c.$$

(Wählt man einen nichtlinearen Ansatz wie etwa die Scheitelpunktsform $p(x) = A(x-B)^2 + C$, so gibt dies auch einen Punkt für die Parabelgleichung, führt aber auf ein nichtlineares Gleichungssystem und erschwert die weitere Arbeit.)

Nun löst man das entstehende lineare Gleichungssystem.

Im Fall der Daten $(x;y) = (2;3),(4;5{,}5),(6;7)$ führt dies auf

$$\begin{array}{lr} p(1) = 2^2 \cdot a + 2 \cdot b + c \approx 3 & (1) \\ p(4) = 4^2 \cdot a + 4 \cdot b + c \approx 5{,}5 & (2) \\ p(6) = 6^2 \cdot a + 6 \cdot b + c \approx 7 & (3) \\ 12a + 2b \approx 2{,}5 & \text{(2)-(1)=(2')} \\ 32a + 4b \approx 4 & \text{(3)-(1)=(3')} \\ 8a \approx -1 \Rightarrow a \approx -\frac{1}{8} & \text{(3')-2}\cdot\text{(2')=(4)} \\ 4b \approx 4 + 4 \Rightarrow b \approx 2 & \text{(4)}\rightsquigarrow\text{(3')=(5)} \\ c \approx 3 + \frac{4}{8} - 2 \cdot 2 = -0{,}5 & \text{(4),(5)}\rightsquigarrow\text{(1)=(6)} \end{array}$$

und man erhält

$$p(x) \approx -0{,}125x^2 + 2x - 0{,}5.$$

(Korrekturbemerkung: Je nach Ablesefehler, können die Ergebnisse ohne Punktabzug etwas anders ausfallen.)

Aufgabe E2

Achilles befestigt das linke Ende eines Gummibandes an einer Wand, das rechte Ende behält er in der Hand und spannt das Band auf eine Länge von 3 Metern.

Er beobachtet eine Ameise, die am linken Bandende startend mit einer Geschwindigkeit von einem Meter pro Minute auf ihn zu krabbelt.

Nach jeder Minute tritt Achilles einen Schritt zurück, wodurch das Band schlagartig um jeweils einen Meter gleichmäßig verlängert wird.

Welche Zeit (Angabe in Minuten und Sekunden) braucht die Ameise vom Start bis zum Erreichen von Achilles?

Lösung

Bei der Dehnung des Bandes ändert sich das Verhältnis der bereits bewältigten Strecke zur jeweiligen Bandlänge nicht.

Unmittelbar vor und nach der ersten Minute hat die Ameise also ein Drittel der jeweiligen Bandlänge geschafft.

Da das Band aber auf 4 Meter verlängert wird, bringt die zweite Minute nur noch ein Viertel und entsprechend die dritte Minute nur noch ein Fünftel der Länge des gedehnten Bandes usw.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{19}{20}=1-\frac{1}{20}$$

Wegen $\frac{1}{20}<\frac{1}{7}$ erreicht die Ameise zwischen der vierten und fünften Minute Achilles.

Nach der vierten Minute hat das Band eine Länge von 7 Metern. Bis zum Erreichen von Achilles fehlen noch $\frac{7}{20}$ Meter, wofür die Ameise $\frac{7}{20}$ Minuten, also 21 Sekunden braucht.

Die Ameise braucht also 4 Minuten und 21 Sekunden, bis sie Achilles erreicht.

Alternativlösung:

Unmittelbar nach der n-ten Minute seit dem Start sei die Ameise x_n Meter vom linken Bandende entfernt, das Band habe zu diesem Zeitpunkt eine Länge von l_n Metern.

Dann gilt

$$l_n = 3 + n \qquad \text{und} \qquad x_{n+1} = (x_n + 1) \cdot \frac{l_{n+1}}{l_n} \text{ mit } x_0 = 0.$$

Also

$$\begin{aligned}
l_0 &= 3 & & \\
l_1 &= 4 & x_1 &= (0+1) \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \\
l_2 &= 5 & x_2 &= \left(\frac{4}{3} + 1\right) \cdot \frac{5}{4} = \frac{7}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{35}{12} \\
l_3 &= 6 & x_3 &= \left(\frac{35}{12} + 1\right) \cdot \frac{6}{5} = \frac{47}{12} \cdot \frac{6}{5} = \frac{47}{10} \\
l_4 &= 7 & x_4 &= \left(\frac{47}{10} + 1\right) \cdot \frac{7}{6} = \frac{57}{10} \cdot \frac{7}{6} = \frac{133}{20} = 7 - \frac{7}{20}
\end{aligned}$$

Wegen $\frac{7}{20} < 1$ erreicht die Ameise zwischen der vierten und fünften Minute Achilles.

Nach der vierten Minute fehlen noch $\frac{7}{20}$ Meter bis zum Erreichen von Achilles, wofür die Ameise $\frac{7}{20}$ Minuten, also 21 Sekunden braucht.

Die Ameise braucht also 4 Minuten und 21 Sekunden, bis sie Achilles erreicht.

Aufgabe E3

Anton und Berta werfen eine faire Münze, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit Kopf oder Zahl zeigt. Anton gewinnt, wenn zuerst zehnmal Kopf erscheint, während Berta gewinnt, wenn zuerst zehnmal Zahl geworfen wird.

a) Nach 14 Würfen steht es 9:5 für Berta, das heißt, es wurde schon 9 mal Zahl, aber erst 5 mal Kopf geworfen. Wie groß ist die Chance, dass Berta am Ende gewinnt?

b) Wie groß ist die Chance für Berta, wenn es nach 12 Würfen 8:4 für Berta steht?

Lösung

a) Wer gewinnt, hängt von der weiteren Wurfergebnisfolge ab.

   Berta genügt einmal Zahl. Anton kann nur gewinnen, wenn in den nächsten 5 Würfen Kopf kommt.

   Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt $\left[\frac{1}{2}\right]^5 = \frac{1}{32}$.

   Die Gewinnchance für Berta ist also

$$1 - \left[\frac{1}{2}\right]^5 = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32} = 0{,}96875.$$

b) Wer gewinnt, hängt von der weiteren Wurfergebnisfolge ab.

   Bei fester Zahl von Münzwürfen ist jede Ergebnisfolge aus Kopf (K) und Zahl (Z) gleich wahrscheinlich.

   Nach spätestens 7 weiteren Würfen hat aber entweder Anton oder Berta gewonnen. Auch wenn das Spiel vorher abgebrochen werden kann, machen wir daher in Gedanken 7 Würfe. Dann reicht es zu zählen, wie viele verschiedene Ergebnisfolgen möglich sind und bei wie vielen davon Berta gewonnen hätte.

   Bei 7 Würfen gibt es $2^7 = 128$ mögliche Ergebnisfolgen.

   Berta gewinnt bei allen Ergebnisfolgen die mindestens 2 mal Zahl enthalten.

   Sie verliert bei allen Folgen die keine Zahl enthalten (nur eine Folge aus lauter Kopf)

   oder nur einmal Zahl enthalten (7 Folgen mit Zahl an Position 1 bis 7),

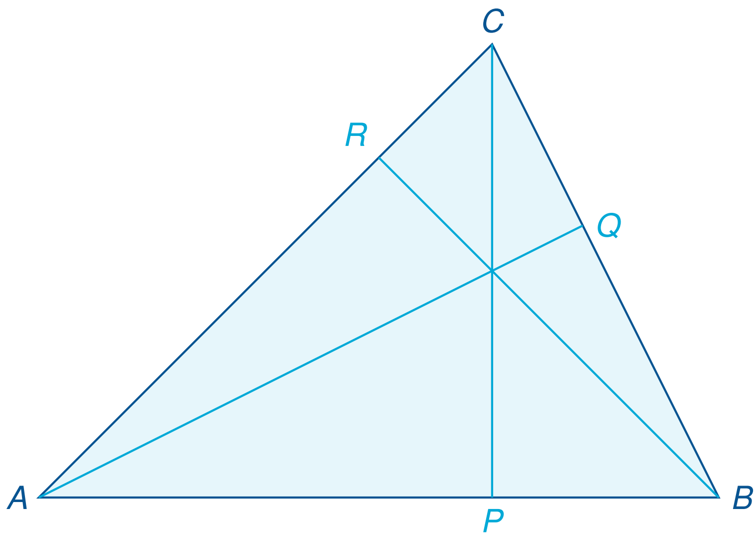
   also bei 8 der 128 möglichen Folgen.

Die Siegchancen für Berta sind also

$$\frac{128-8}{128} = \frac{120}{128} = \frac{15}{16} = 0{,}9375.$$

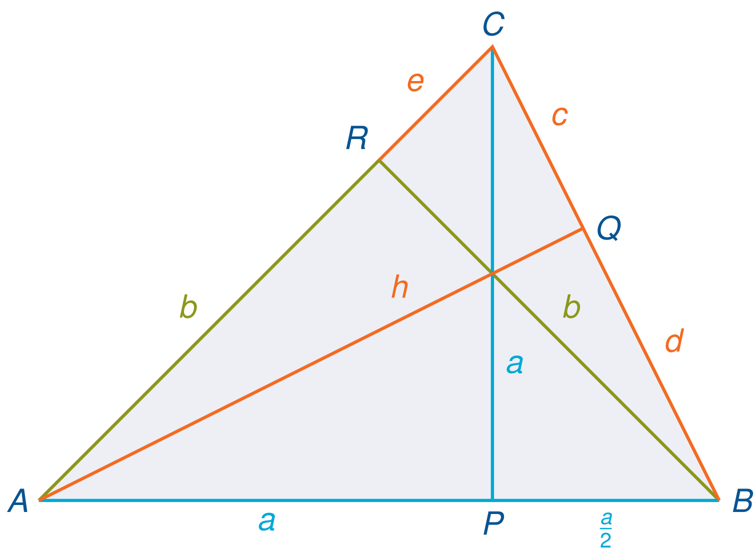
Aufgabe E4

Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck mit Ecken A,B,C und Höhenfußpunkten P,Q,R. Bekannt sei, dass der Abstand von P zu C gleich dem Abstand von P zu A und doppelt so groß wie der Abstand von P zu B ist.



Zeigen Sie, dass der Abstand von Q zu A das Dreifache des Abstandes von Q zu C ist.

Lösung



Das rechtwinklige Dreieck ΔPBC hat nach Voraussetzung Katheten der Länge $\frac{a}{2}$ und a, also hat die Hypotenuse die Länge $c + d = \frac{a}{2}\sqrt{5}$.

Das ebenfalls rechtwinklige Dreieck ΔABQ enthält auch den Winkel $\angle CBA$, ist also ähnlich zu ΔPBC.

Für die Seitenverhältnisse gilt daher

$$\frac{h}{\frac{3}{2}a} = \frac{a}{c+d} = \frac{a}{\frac{a}{2}\sqrt{5}}, \quad \text{also} \quad h = \frac{3a}{\sqrt{5}} \tag{1}$$

$$\frac{d}{\frac{3}{2}a} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{5}}, \quad \text{also} \quad d = \frac{3a}{2\sqrt{5}}. \tag{2}$$

Damit lässt sich auch c durch a ausdrücken:

$$c = (c+d) - d = \frac{5a}{2\sqrt{5}} - \frac{3a}{2\sqrt{5}} = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

Vergleich mit Gleichung (1) ergibt das behauptete Ergebnis:

$$h = 3c.$$

Zentrum für Mathematik · Tachauer Straße 4 · 36119 Neuhof
Internet: zfm.education · Email: tdm@z-f-m.de

Es gibt viele **weitere** (zumeist umständlichere) **Lösungswege**, zum Beispiel:

Es ist $\angle BAC = \angle PAC = \frac{\pi}{4}$, weil das Dreieck ΔAPC nach Voraussetzung gleichschenklig ist.

Dann ist auch $\angle RBA = \frac{\pi}{4}$ und damit $\overline{BR} = \overline{AR}$. Das ist die Länge b in der Skizze.

Die Dreiecke ΔAQC und ΔBCR sind ähnlich, denn beide sind rechtwinklig und enthalten den Winkel $\angle ACB$.

Das Verhältnis der Katheten ist daher in beiden Dreiecken gleich:

$$\frac{h}{c} = \frac{b}{e} \tag{1}$$

Pythagoras für die beiden rechtwinkligen Dreiecke ΔABR und ΔAPC liefert

$$\begin{aligned} 2b^2 &= (a + \frac{a}{2})^2 = \frac{9}{4}a^2 \\ 2a^2 &= (e+b)^2 \end{aligned}$$

Eliminieren von a^2 ergibt

$$2b^2 = \frac{9}{8}(e+b)^2 \quad \text{oder} \quad 16b^2 = 9(e+b)^2.$$

Durch Wurzelziehen wird daraus

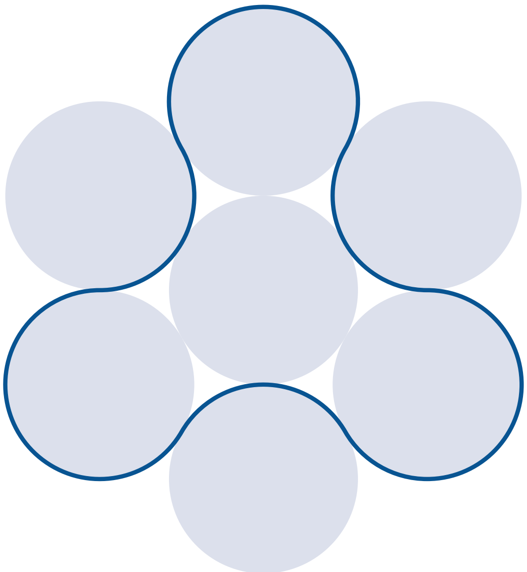
$$4b = 3(b+e),$$

weil beide Seiten positive Zahlen sein müssen. Also ist $b = 3e$ und damit wegen (1) schließlich, wie behauptet

$$h = 3c.$$

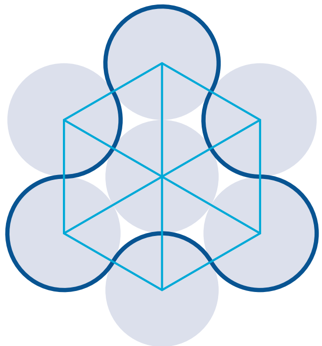
Aufgabe H1

Die sieben Kreise der Rosette haben alle einen Radius von zehn Zentimetern.
Wie lang ist die blaue Linie?



Lösung

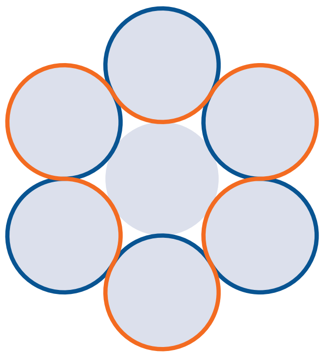
Lösungsweg 1:



Legt man über die Figur ein Raster aus gleichseitigen Dreiecken, deren Ecken mit den Kreismittelpunkten zusammenfallen, so sieht man, dass die kurzen Bögen der blauen Linie jeweils ein Drittel und die langen Bögen zwei Drittel eines Kreisumfangs sind.

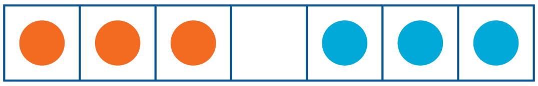
Insgesamt besteht die Linie also aus drei Kreisumfängen und hat somit die Länge $6\pi \cdot 10$cm oder ungefähr 188,5cm.

Lösungsweg 2:



Zeichnet man die Kreislinienanteile, die nicht zur Rosette gehören, orangefarben, erhält man eine zweite gleichlange orangefarbene Rosette. Daraus folgt eine Rosettenlänge von $6\pi \cdot 10$cm oder ungefähr 188,5cm.

Aufgabe H2



Auf einem Spielbrett, das nur eine Reihe mit 7 Feldern hat, liegen 3 orangefarbene Spielsteine (links) und 3 blaue Spielsteine (rechts) wie abgebildet.

Die orangefarbenen und die blauen Steine sollen nun durch bestimmte Züge die Plätze tauschen. Dabei sind nur zwei Arten von Zügen erlaubt:

1. Das Verschieben eines Steins auf ein direkt benachbartes freies Feld.
2. Das Springen über einen einzelnen **andersfarbigen** Stein auf das direkt dahinter liegende freie Feld.

Außerdem dürfen die orangefarbenen Steine nur nach rechts und die blauen Steine nur nach links ziehen oder springen.

Wie viele Züge werden dabei benötigt? Die Züge müssen nicht angegeben werden.

(Es darf verwendet werden, dass die Aufgabe lösbar ist.)

Lösung

Lösungsweg 1: (durch Ausprobieren)

Es gibt genau 2 Lösungen, die sich nur dadurch unterscheiden, welche Farbe den ersten Zug macht.

Wenn eine Farbe am Zug ist, macht sie soviele Züge wie möglich hintereinander, mit der einzigen Einschränkung, dass zwar beliebig viele Sprünge ausgeführt werden dürfen, aber höchstens einmal verschoben wird.

Danach ist die andere Farbe an der Reihe. Dies wechselt bis die Endposition nach 15 Zügen erreicht ist.

Lösungsweg 2: (durch Schlussfolgerung)

Die einzelnen orangefarbenen Steine können ihre Reihenfolge durch keinen Zug ändern. Das gleiche gilt für die blauen Steine. Alle orangefarbenen Steine müssen daher genau 4 Felder nach rechts rücken und alle blauen Steine 4 Felder nach links. Dies erfordert $6 \cdot 4 = 24$ Einzelverschiebungen, falls nicht gesprungen wird.

Damit die orangefarbenen und blauen Steine aneinander vorbeiziehen können, muss jeder der 3 orangefarbenen Steine mit jedem der 3 blauen Steine die relative Position tauschen, indem entweder der orangefarbene über den blauen Stein springt, oder von ihm übersprungen wird. Dies sind genau 9 Sprünge und bei jedem Sprung kommt ein Stein seinem Ziel um 2 Felder statt nur einem Feld näher.

Es werden also nur $24 - 9 = 15$ Züge benötigt.

Aufgabe H3

Wie lautet die Einerstelle der Zahl:

$$Z = 1! + 2! + 3! + \ldots + 2025!$$

Dabei bedeutet $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ das Produkt aller Zahlen von 1 bis n.

Lösung

Ab $n = 5$ enthält $n!$ immer die Faktoren 2 und 5 und endet daher auf 0. Für die letzte Stelle von Z ist daher nur

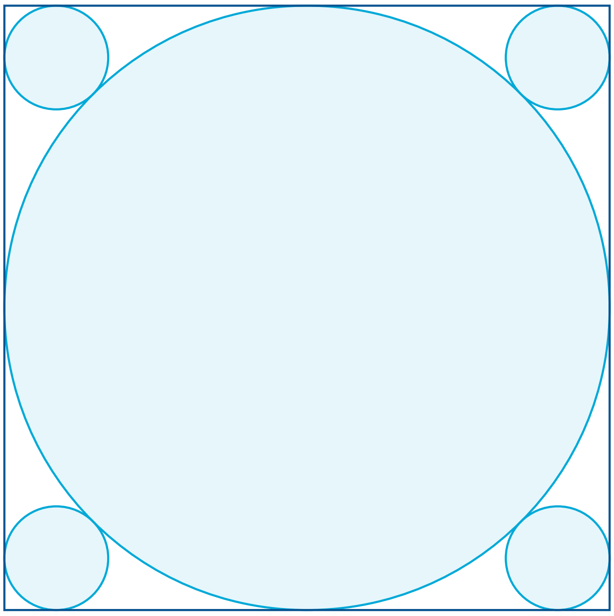
$$1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33$$

relevant. Die letzte Ziffer von Z lautet also 3.

Zentrum für Mathematik · Tachauer Straße 4 · 36119 Neuhof
Internet: zfm.education · Email: tdm@z-f-m.de

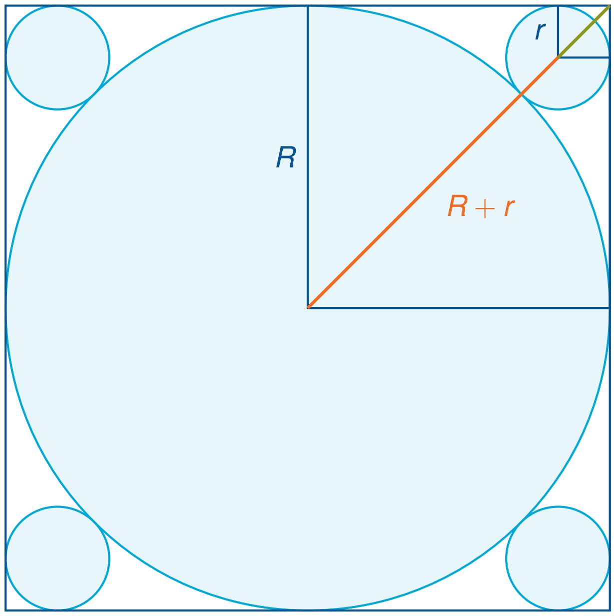
Aufgabe H4

In ein Quadrat mit Seitenlänge 2 ist ein großer Kreis einbeschrieben und in die 4 Ecken jeweils ein kleinerer Kreis, der den großen Kreis und das Quadrat berührt.



Wie groß ist der Radius der kleinen Kreise?

Lösung



Ist $R = 1$ der Radius des großen Kreises und r der Radius des kleinen Kreises, hat die orangefarbene Strecke in der Skizze die Länge $R + r$, die grüne Strecke in der Skizze die Länge $\sqrt{2}r$ und beide Strecken zusammen die Länge $\sqrt{2}R$.

Es gilt also

$$\begin{aligned}\sqrt{2}R &= R + r + r\sqrt{2}\\ \Rightarrow r &= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}R = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \quad \text{(reicht als Ergebnis)}\\ &= \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{2+1-2\sqrt{2}}{2-1} = 3-2\sqrt{2}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe H5

Wie viele fünfstellige Zahlen gibt es, bei denen mindestens zwei benachbarte Ziffern übereinstimmen?

(Hinweis: Es genügt die Angabe des Lösungsterms.)

Lösung

Gegeben sei eine fünfstellige Zahl $abcde$.

Für a gibt es 9 Möglichkeiten aus $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Für b,c,d,e gibt es je 10 Möglichkeiten aus $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Anzahl der fünfstelligen Zahlen: $9 \cdot 10^4 = 90.000$

Von diesen $9 \cdot 10^4$ fünfstelligen Zahlen ist die Anzahl derjenigen Zahlen zu subtrahieren, bei denen keine zwei aufeinanderfolgenden Ziffern übereinstimmen.

Wählt man zunächst Ziffer a, so gibt es 9 Möglichkeiten aus $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Ziffer b darf nicht mit der links stehenden Ziffer a übereinstimmen.

Wenn z.B. $a = 2$ ist, dann gibt es für b die 9 Möglichkeiten aus $\{0,1,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Ist z.B. $b = 6$, so gibt es ebenfalls 9 Möglichkeiten für c aus $\{0,1,2,3,4,5,7,8,9\}$.

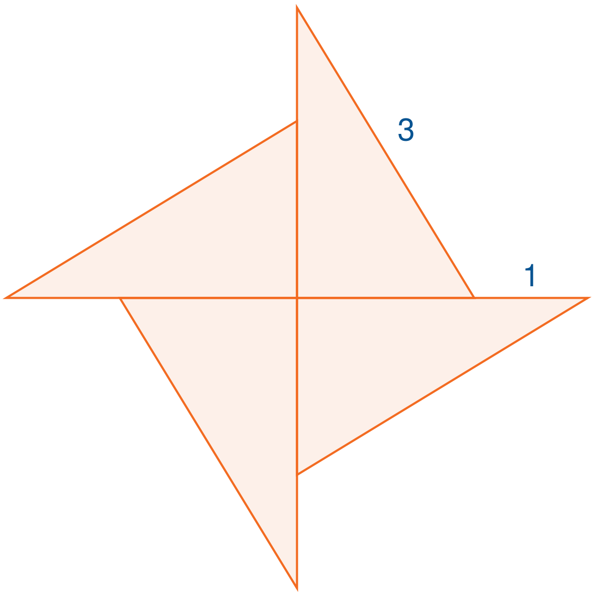
Die gleiche Überlegung gilt für d bzw. e.

Es gibt also 9^5 fünfstellige Zahlen, bei denen keine zwei aufeinanderfolgenden Ziffern übereinstimmen.

Die Anzahl der gesuchten Zahlen ist $9 \cdot 10^4 - 9^5 = 30951$.

Aufgabe H6

Ein Stern, dessen Seiten die Längen 1 und 3 haben, ist aus vier gleichen rechtwinkligen Dreiecken (wie im Bild) zusammengesetzt.



Wie groß ist die Fläche jedes dieser Dreiecke?

Lösung

Lösungsweg 1:

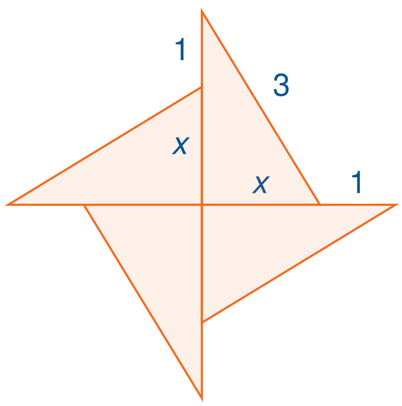
$$A = \frac{1}{2} \cdot x(x+1) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + x)$$

Nach Pythagoras gilt:

$$\begin{aligned} 3^2 &= x^2 + (x+1)^2 \\ 8 &= 2x^2 + 2x \\ 4 &= x^2 + x \end{aligned}$$

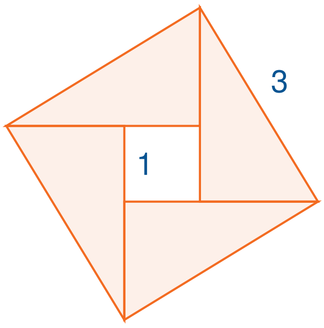
Also folgt

$$A = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

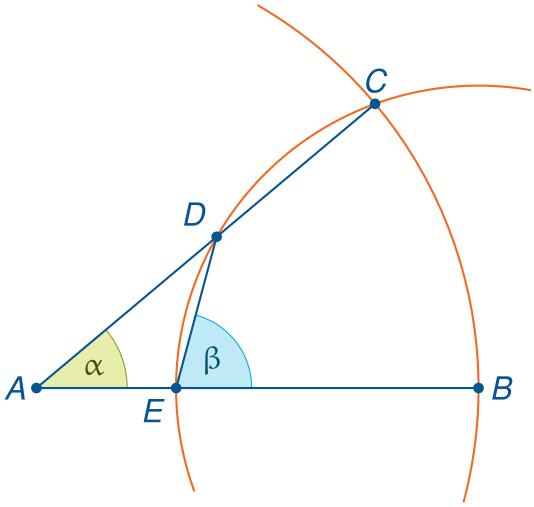


Lösungsweg 2:

$$A = \frac{1}{4}(3^2 - 1^2) = 2$$



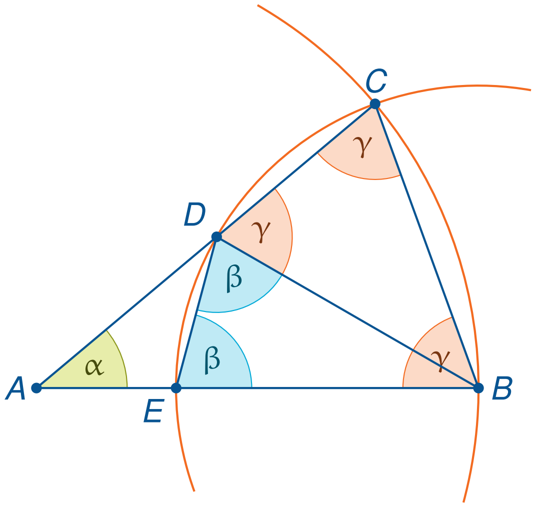
Aufgabe H7



In der Skizze liegen *B* und *C* auf einem Kreis um *A*. *C*, *D*, und *E* liegen auf einem Kreis um *B*.

Wie groß ist der Winkel α, wenn $\beta = 75°$ ist?

Lösung



Die Dreiecke $\triangle CAB$, $\triangle DBC$ und $\triangle EBD$ sind gleichschenklig.

Daher sind die Winkel $\angle BED = \angle EDB = \beta = 75°$ sowie die Winkel $\angle BDC = \angle DCB = \angle CBA = \gamma$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\angle ADE &= 180° - 75° - \gamma \\
\angle DEA &= 180° - 75° \\
\alpha &= 180° - \angle ADE - \angle DEA = \gamma - 30° \\
&= 180° - \angle ACB - \angle CBA = 180° - 2\gamma \\
\Rightarrow \gamma &= 70° \\
\Rightarrow \alpha &= 40°
\end{aligned}$$

Aufgabe H8

Es sei gegeben:

$$1+2\cdot\sqrt{1+2\cdot\sqrt{1+2\cdot\sqrt{1+\cdots}}}=x$$

Bestimmen Sie x.

Lösung

$$\begin{aligned}
1+2\cdot\sqrt{1+2\cdot\sqrt{1+2\cdot\sqrt{1+\cdots}}} &= x\\
1+2\cdot\sqrt{x} &= x\\
2\cdot\sqrt{x} &= x-1\\
4x &= (x-1)^2\\
4x &= x^2-2x+1\\
0 &= x^2-6x+1
\end{aligned}$$

Nullstellen der Parabel liegen bei $x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-1}=3\pm 2\sqrt{2}$.
Wegen $x>1$ ist $x_1=3+2\sqrt{2}$ alleinige Lösung.