Zeitvariabilität in Aktiven Galaxien

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Fakultät für Physik
der Eberhard–Karls–Universität zu Tübingen

Michael König
aus Aalen

1997

Tag der mündlichen Prüfung	xx.xx.1997
Dekan:	Prof. Dr. D. Kern
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. Rüdiger Staubert
2. Berichterstatter:	Dr. habil. Stefan Wagner

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den leuchtkräftigsten Objekten im Universum, den sog. *Aktiven Galaxienkernen* (AGN). Diese im Zentrum von Galaxien befindlichen Objekte erscheinen im Röntgenlicht als Punktquellen. Neben der Untersuchung des Energiespektrums der emittierten Strahlung wird im Rahmen neuerer Forschungprojekte der Röntgenastronomie das zeitliche Verhalten der beobachteten Helligkeitsschwankungen untersucht.

Die bisherigen Versuche einer Beschreibung und Klassifizierung beobachteter Variationen in den Röntgenlichtkurven Aktiver Galaxien lieferten nicht zufriedenstellende Ergebnisse. Zentrales Anliegen war daher die Frage nach der Möglichkeit einer konsistenten Quantifizierung der zeitlichen Variabilität. Durch die Anwendung einer stochastischen Modellbeschreibung im Rahmen eines linearen Zustandsraummodelles (LSSM) ist es erstmals gelungen, mit der Relaxationszeit τ des geschätzten Autoregressiven Prozesses 1. Ordnung, eine selbstkonsistente und robuste Variabiliätszeitskala zu definieren. Diese Zeitskala beschreibt die gesamte Bandbreite der sichtbaren Dynamik der Röntgenlichtkurven.

Die in der Literatur oft verwendete Abschätzung der Maximalgröße der Röntgenemissionsregion aus der schnellsten Variationszeitskala beinhaltet mögliche Fehlerquellen und sollte deshalb zur Charakterisierung *nicht* verwendet werden. Es wurde gezeigt, daß auch Punktquellen die beobachtete Variabiltät zwanglos erklären und zudem mit dem vermuteten Comptonisierungsprozess vereinbar sind, wohingegen eine flächenhafte Helligkeitsemission zu Widersprüchen führt. Desweiteren stellt die Zufälligkeit der AGN Beobachtung und damit die sich ergebende Zufälligkeit der beobachteten schnellsten Zeitskala keinen veritablen Weg einer Variabilitätsuntersuchung dar. Das Zustandsraummodell erfaßt nicht nur ein Detail der Lichtkurve, sondern benutzt das Zusammenwirken aller auftretenden zeitlichen Korrelationen zur Charakterisierung der AGN Variabilität.

Die vorgestellte LSSM Methodik wurde auf ein AGN Sample von Lichtkurven des Röntgensatelliten EXOSAT angewandt, das die längsten existierenden Röntgenlichtkurven beinhaltet. Hierbei wurde ein Zusammenhang zwischen der Steilheit des Photonenspektrums und der Relaxationszeit der Zeitreihe gefunden. Zeitliche und energetische Informationskanäle, die bislang meist voneinander unabhängig untersucht wurden, liefern zusammen ein konsistentes Bild des AGN Emissionsprozesses.

Auf der Empirie aufbauend, wurde im Rahmen zeitabhängiger Comptonisierungsmodelle versucht, das Emissionsszenario zu simulieren und die gefundene Relation zu reproduzieren. Zufriedenstellende Resultate verlangen eine scheibenartige Anordnung des comptonisierenden Mediums, einer Korona aus heißen Elektronen. Ein wichtiges Ergebnis dieser Simulationen ist die gefundene konstante Schichtdicke der Korona, unabhängig vom untersuchten AGN Typus.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Den Zufall gibt die Vorsehung — zum
Zwecke muß ihn der Mensch gestalten.
Friedr. von Schiller, Don Carlos III/2

1895 stieß Wilhelm Conrad Röntgen bei seinen Experimenten in Würzburg durch *Zufall* auf geheimnisvolle Strahlen, die in der Lage waren, Materialien zu durchdringen und deshalb, schon wenige Jahrzehnte nach ihrer Entdeckung, in der medizinischen Diagnostik Anwendung fanden. Wie Max von Laue fünfzehn Jahre später anhand von Beugungsversuchen an Kristallen nachwies, hatte Röntgen eine neue Variante elektromagnetischer Strahlung gefunden, die viel kurzwelliger – und damit energiereicher – als das sichtbare Licht war.

Durch die nahezu vollständige Absorption der Röntgenstrahlung beim Durchgang durch die Erdatmosphäre gezwungen, unternahm man in den fünfziger Jahren Raketenflüge, um extraterrestrische Röntgenquellen aufzuspüren. Hierbei entdeckte man neben der Sonnenkorona auch bislang unbekannte Objekte als Quellen von Röntgenstrahlung. In den sechziger Jahren lieferten immer neue Flüge von Höhenforschungsraketen und Ballonexperimenten die Erkenntnis, daß energiereiche Strahlung, wie sie in der Umgebung kompakter Objekte, z.B. bei der Explosion einer Supernova, entsteht, die Ursache der detektierten Röntgenquellen ist. Der erste Röntgensatellit UHURU, der 1970 gestartet wurde, konnte etwa 400 Röntgenquellen am Himmel lokalisieren, von denen etwa ein Dutzend zeitliche Veränderungen ihrer Röntgenhelligkeit zeigten. In den folgenden Jahren konnte durch eine große Zahl neuer Missionen - insbesondere durch den Röntgensatelliten ROSAT - die Anzahl bekannter Quellen um zwei Größenordnungen erhöht werden.

Während meiner Diplomarbeit, die ein vermutetes periodisches Verhalten in dem Röntgenlicht einer Aktiven Galaxie zum Thema hatte, stellte sich heraus, daß die wahre Quelle der Periodizität nicht die weit entfernte Galaxie, sondern ein Doppelstern (ein Objekt in unserer Milchstraße), der *zufällig* in gleicher Sichtrichtung stand, diese Verwirrung auslöste. Obschon der eigentliche Untersuchungsgegenstand, die Variationen Aktiver Galaxien, wenn auch nicht mehr periodisch, sondern *nur* noch unregelmäßig waren, wurden diese im Rahmen dieser Dissertation eingehend untersucht.

Allgemeine Ausführungen zu etablierten Methoden der Zeitreihenanalyse im Rahmen astronomischer Datenauswertung finden sich in Kapitel 2. Hierbei stand für mich im Vordergund, die Probleme aufzuzeigen, die unvermeidlich entstehen, wenn man Konzepte periodischer Untersuchungstechniken – *fachfremd* – auf unregelmäßige, irreguläre Zeitreihen anwendet. Zeitreihenanalyse wurde und wird in der Astronomie meist zur Untersuchung periodischer Phänomene benutzt. So ist es nicht verwunderlich, daß im weiteren Verlauf der Forschung und dem Anwachsen des Datenbestandes, auch die immer häufiger auftretenden irregulären Werteverläufe astronomischer Meßgrösen entweder nicht oder eben mit den genannten herkömmlichen Methoden der Periodensuche analysiert wurden, was vielfach nicht zu befriedigenden Resultaten führte.

Durch *Zufall* entstand auf der Konferenz *Time Series Analysis in Astronomy and Meterology* (1993 in Padua, Italien) eine sehr fruchtbare Zusammenarbeit mit dem Freiburger Institut für Datenanalyse und Modellbildung. Zum ersten Mal wurden astronomische Zeitreihen mit stochastischen Modellbeschreibungen – d.h. mit *Zufallsprozessen* – konfrontiert und es gelang, am Beispiel der Röntgenlichtkurven Aktiver Galaxien, die Wirksamkeit der neuen Methode eindrucksvoll zu demonstrieren. Die neu entdeckten Zusammenhänge beschränken sich nicht nur auf die Galaxienforschung, sondern eröffnen der stochastischen Methodik weitere neue Anwendungsfelder im Rahmen astronomischer Zeitreihenanalyse.

Um die Anwendung der seit Beginn dieses Jahrhunderts bekannten Klasse stochastischer Prozesse zur Untersuchung von irregulären Variationen astronomischer Zeitreihen zu illustrieren, wird in Kapitel 3 die Theorie stochastischer Prozesse in Grundzügen vorgestellt und diskutiert. In Kapitel 4 wird, daran anschließend, die Technik der Linearen Zustandsraummodelle beschrieben, die es durch explizite Behandlung des Beobachtungsrauschens erlaubt, ohne Informationsverlust oder -verfälschung, stochastische Prozesse physikalischen Zeitreihen anzupassen.

Die Anwendung der besprochenen Methode der linearen Zustandsraummodelles auf physikalische Daten erfolgt in Kapitel 5 durch die Analyse einer Zusammenstellung von Röntgenlichtkurven Aktiver Galaxien, die vom Satellit EXOSAT beobachtet wurden. Der im Rahmen dieser Arbeit neu gefundene Zusammenhang zwischen stochastischem Verhalten der Zeitreihe und dem Energiespektrum der Aktiven Galaxien stellt nur eine Folgerung dar. Zentrales Ergebnis ist die Tatsache, daß stochastische Prozesse die lang gesuchte Möglichkeit darstellen, die Charakteristika irregulären Verhaltens astronomischer Zeitreihen erfolgreich zu quantifizieren.

Kapitel 2

Theorie der Zeitreihen

2.1 Allgemeine Definitionen

Unter einer *Zeitreihe* versteht man eine sequentielle Ansammlung einzelner Beobachtungen einer Meßgröße $x(t)$. Dabei können die interessierenden Beobachtungen entweder als *kontinuierlicher* oder als *diskreter* Werteverlauf innerhalb eines Beobachtungszeitraumes gegeben sein. In der Astronomie liegen Zeitreihen meist als diskrete Messungen $x(t_i)$ vor, die zu den Zeitpunkten $t_i, i \in [1, \ldots, N]$ gemessen wurden. Eine Zeitreihe beschreibt somit immer einen *endlichen* Ausschnitt der Realität.

Ganz allgemein kann man die Größe $x(t)$ als eine *Zufallsvariable* auffassen, die bei jeder Messung zu einem Zeitpunkt t des Beobachtungszeitraums einen möglichen Wert $x(t)$ aus einer Gesamtheit, dem *Ensemble* Ω_x, liefert (Priestley 1996). Die einzelne Messung beschreibt somit *eine Realisierung* der Zufallsvariablen. Meist wird die gesamte Zeitreihe der Einzelmessungen als eine Realisierung eines stochastischen Prozesses, eines *Zufallsprozesses* bezeichnet (Honerkamp 1994). Man versteht unter diesen Prozessen i.a. dynamische Vorgänge mit Zufallscharakter, wobei die einzelnen Zufallsvariablen $x(t)$ voneinander abhängig sein können. Die *Zeitreihenanalyse* beschäftigt sich mit dem Studium dieser Abhängigkeiten $x(t) \leftrightarrow x(t')$ ($t \neq t'$, Schlittgen & Streitberg 1994).

Jede Zufallsvariable $x(t)$ einer betrachteten Zeitreihe besitzt dabei eine individuelle Wahrscheinlichkeitsverteilung[1] $P_t(x)$. Die gesamte Zeitreihe der Zufallsvariablen $x(t_1), x(t_2) \ldots x(t_N)$ läßt sich demnach nur dann vollständig beschreiben, wenn man die zusammenfassende Wahrscheinlichkeitsverteilung, die sog. *joint probability distribution* der Zeitreihe betrachtet. Man spricht in diesem Fall von einer *univariaten* Wahrscheinlichkeitsverteilung (Hamilton 1994; Fuller 1996). Zur

[1] Im folgenden wird davon ausgegangen, daß die jeweils verwendete Wahrscheinlichkeitsverteilung normiert ist, d.h. es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} P_t(x)\, dx = 1$.

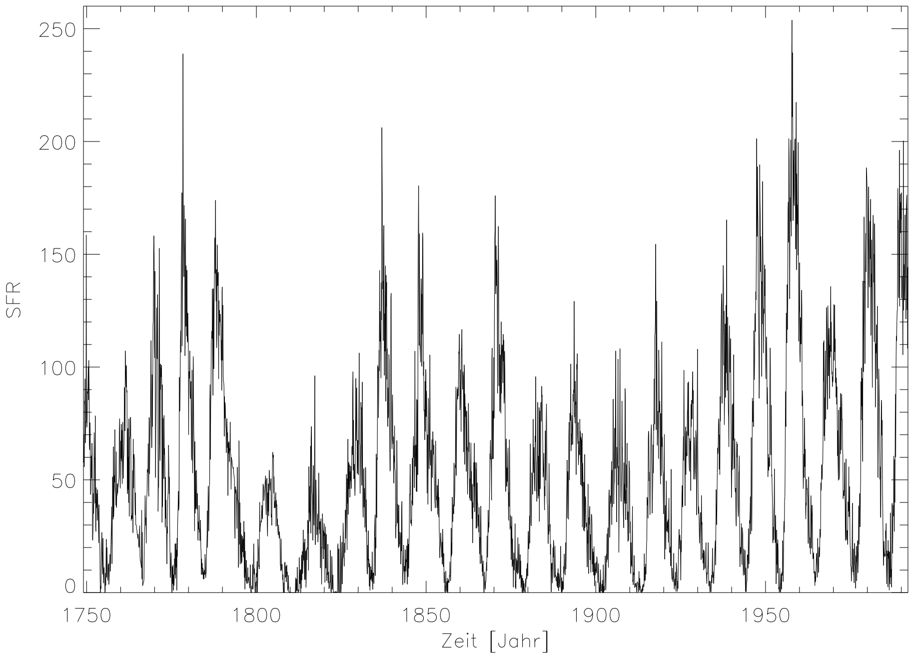


Abbildung 2.1: Zeitreihe der Sonnenfleckenrelativzahlen der Jahre 1749–1991. Die Ordinate des Diagramms beschreibt die monatlichen Mittelwerte nach Wolf.

Charakterisierung dieser Verteilungsfunktion verwendet man z.B. den Mittelwert μ und die Varianz σ^2.

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) P_t(x)\, dx = \sum_{i=1}^{N} x(t_i)\, P_{t_i}\,(x(t_i)) \tag{2.1}$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - \mu)^2\, P_t(x)\, dx = \sum_{i=1}^{N} (x(t_i) - \mu)^2\, P_{t_i}(x(t_i)) \tag{2.2}$$

Diese beiden Größen liefern auch eine erste statistische Beschreibung bei der Analyse einer gemessenen Zeitreihe. Vielfach wird auch schon die Varianz, d.h die Streubreite einer Zeitreihe um ihren Mittelwert benutzt, um die *Variabilität* der Zeitreihe zu beschreiben. Dabei ist jedoch zu beachten, daß es möglich ist, verschiedene Verteilungsfunktion mit gleichen Werten für μ und σ zu konstruieren, die zu vollkommen unterschiedlichen Zeitreihen $x(t)$ führen (Priestley 1996). Die gegebenen Formeln für Mittelwert und Varianz lassen sich kompakter als Erwartungswerte $E[x]$ und $E[(x-\mu)^2]$ schreiben, unter Annahme der geltenden Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_t(x)$. Im einfachsten Fall einer Zeitreihe voneinander unabhängiger, identisch (normal-)verteilter Zufallsvariablen $x(t)$, d.h. für $P_t(x) = \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ entsprechen die Erwartungswerte dem Mittelwert und der Varianz der Normalverteilung. Im allgemeinen Fall kann sich für eine univariate Zeitreihe die Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine Messung $x(t)$ mit der Zeit ändern, was eine Zeitabhängigkeit, z.B. von $\mu(t)$ und $\sigma(t)$, zur Folge hat (s. Kap. 3). Man bezeichnet Prozesse, deren statistische Eigenschaften sich nicht mit der Zeit ändern als *stationäre* Prozesse. Ein Prozeß wird als *vollkommen stationär* bezeichnet, wenn die zugehörige *joint probability distribution* invariant gegenüber einer beliebigen zeitlichen Verschiebung ist. Oftmals ersetzt man diese strenge Bedingung durch den Begriff der *varianz-stationären* Zeitreihe (Stationarität 2. Ordnung), wenn Mittelwert und Varianz zeitunabhängige Größen sind (Schlittgen & Streitberg 1994).

2.2 Autokovarianz- und Autokorrelationsfunktion

Eine zentrale Stellung bei der Untersuchung von Zeitreihen nimmt die Suche nach den Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Zeitpunkten ein. Als einfachste Möglichkeit ergibt sich die Frage nach einer vorhandenen linearen Abhängigkeit. Die zugehörige statistische Kenngröße ist die *Kovarianz*. Aus der Stationarität einer Zeitreihe $x(t)$ kann man für die Kovarianz cov folgern

$$\mathrm{cov}(\mathrm{x(t)\,x(t+\Delta)}) = \mathrm{E}[(\mathrm{x(t)}-\mu)(\mathrm{x(t+\Delta)}-\mu)] = \mathrm{R}(\Delta) \tag{2.3}$$

wobei die *Autokovarianzfunktion* $R(\Delta)$ nur von der Verschiebung Δ, nicht aber von der Zeit t anhängt. Normiert man $R(\Delta)$ auf die Varianz der betrachteten Zeitreihe $x(t)$, so erhält man die *Autokorrelationsfunktion* $\rho(\Delta)$.

$$\rho(\Delta) \;=\; \frac{R(\Delta)}{R(0)} = \frac{\mathrm{cov}(\mathrm{x(t)\,x(t+\Delta)})}{\sqrt{\mathrm{var(x(t))}\cdot\mathrm{var(x(t))}}} \tag{2.4}$$

mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \rho(0) &= 1 \\ |\rho(\Delta)| &\leq 1 \quad \forall\,\Delta \\ \rho(\Delta) &= \rho(-\Delta) \quad \forall\Delta \quad \text{u.A.}\,\rho \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Man interpretiert $\rho(\Delta)$ als ein Maß für die *Ähnlichkeit* zeitlich verschobener Teilstücke der Zeitreihe $x(t)$. Somit kann man aus der Autokorrelationsfunktion auf zeitliche Abhängigkeiten der betrachteten Zeitreihe schließen. Enthält die Zeitreihe zum Beispiel eine Oszillation mit der Periode P, d.h. gilt $x(t) = x(t+P)$, so wird $\rho(\Delta)$ für Verschiebungen $\Delta = k \cdot P$ für $k \in \mathbb{N}_0$ maximal. Im allgemeinen erwartet man eine Abnahme der Autokorrelation mit wachsender Verschiebung. Dieses typische Verhalten von $\rho(\Delta)$ kann man als einen Erinnerungsverlust des

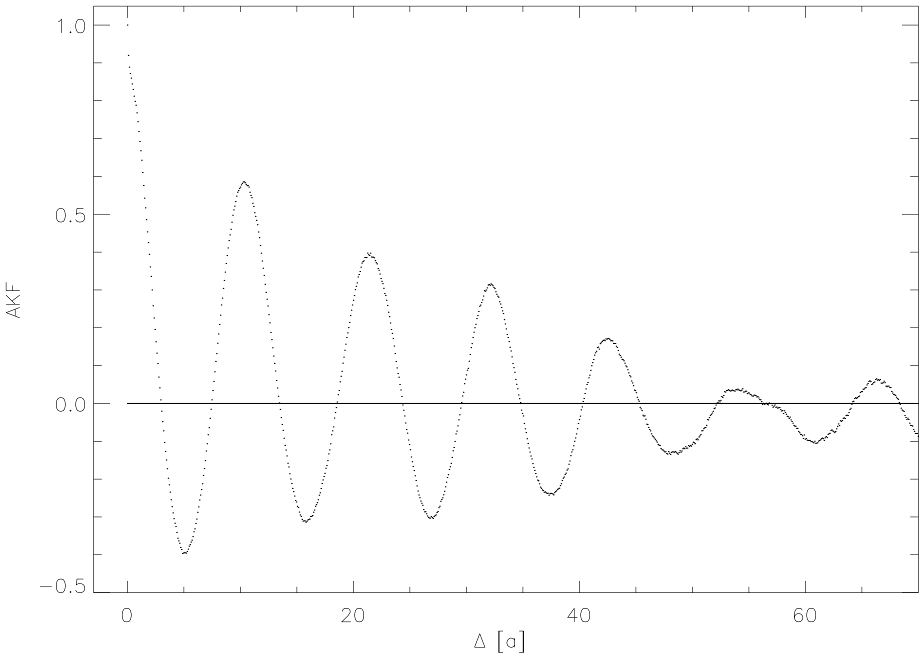


Abbildung 2.2: Autokorrelationsfunktion $\rho(\Delta)$ der Zeitreihe aus Abb. 2.1.

Zufallsprozesses interpretieren (Priestley 1996). Dabei quantifiziert die Abklingrate[2] (Zerfallszeit) von $\rho(\Delta)$ diesen Verlust. Die Autokorrelationfunktion der in Abb. 2.1 gezeigten Zeitreihe der Sonnenfleckenrelativzahlen besitzt eine Periodizität (mit einer Periode von ca. 11 Jahren) und eine Abklingrate von etwa 30 Jahren (s. Abb. 2.2).

2.3 Das Periodogramm

2.3.1 Definition

Empirische Zeitreihen der Astronomie weisen häufig ein mehr oder minder ausgeprägtes zyklisches Verhalten auf, das mit der Angabe der zugehörigen Periode P bzw. der Frequenz $f = P^{-1}$ beschrieben wird. Die wichtigste Klasse periodischer Funktionen sind die *harmonischen Schwingungen*, die durch Überlagerungen von Sinus– und Kosinuswellen beschrieben werden. Jede periodische Funktion $x(t)$ kann demnach, unabhängig von der Form ihrer Schwingung, durch eine solche

[2]Als Abklingrate bezeichnet man meist die Zeit, die unter Annahme eines exponentiellen Zerfalls $e^{-\Delta/\tau}$ von $\rho(\Delta)$ der $\frac{1}{e}$-Relaxationszeit τ entspricht.

Fourierreihe dargestellt werden (Spiegel 1990).

$$x(t) \quad = \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} \left(a_k \, \cos(\omega_k t) + b_k \, \sin(\omega_k t)\right) \tag{2.5}$$

wobei gilt

$$\omega_k \quad = \quad \frac{2\pi k}{N} \qquad k = 0, 1, \ldots, m \quad \text{und} \quad N = 2m + 1 \tag{2.6}$$

$$a_k \quad = \quad \frac{2 \sum_{i=1}^{N} x(t_i) \cos(\omega_k t_i)}{N} \tag{2.7}$$

$$b_k \quad = \quad \frac{2 \sum_{i=1}^{N} x(t_i) \sin(\omega_k t_i)}{N} \quad , \quad k \neq 0 \tag{2.8}$$

Die bei der Entwicklung benutzten *Fourierkoeffizienten* a_k und b_k bestimmen den Beitrag der Sinus– und Kosinuswellen der Frequenz ω_k[3] zum Gesamtbild der Zeitreihe. Um diesen Beitrag zu quantifizieren, berechnet man die normierte Summe der Quadrate der Fourierkoeffizienten

$$I(\omega_k) \quad = \quad \frac{N}{2}\left(a_k^2 + b_k^2\right) \quad \text{für } k = 1, 2, \ldots, m \tag{2.9}$$

Die Funktion $I(\omega_k)$ wird als *Periodogramm* der Zeitreihe $x(t)$ bezeichnet und gibt für jede Fourierfrequenz ω_k an, mit welcher Stärke[4] diese in der Zeitreihe vertreten ist. Man kann daher das Periodogramm als heuristisches Hilfsmittel zur Aufdeckung verborgener Periodizitäten benutzten (Schlittgen & Streitberg 1994). Dabei ist wichtig, daß die Fourierfrequenzen ω_k auf den Abstand 1 der einzelnen, äquidistanten Beobachtungen $x(t_i)$ normiert wurden. Im allgemeinen besitzen diskrete, äquidistante Zeitreihen eine konstante *Samplingzeit* Δt, die der Meßzeit $t_{i+1} - t_i$ eines Wertes $x(t_i)$ entspricht. Die gesamte Beobachtungszeit T_{Ges} ist in diesem Fall durch $N \cdot \Delta t$ gegeben. Dadurch ergibt sich

$$\omega_k' \quad = \quad \frac{2\pi}{N \Delta t} k \quad , \quad k = 1, 2, \ldots m \tag{2.10}$$

für $m = \frac{N}{2}$ wenn N gerade und $m = \frac{N-1}{2}$, falls N ungerade ist. Somit ist es nicht möglich, aus dem Periodogramm auf Periodizitäten der Zeitreihe $x(t)$ zu

[3] Für diese unabhängigen *Fourierfrequenzen* ω_k (2.6) gelten die Orthogonalitätsrelationen $\sum \cos(\omega_k t) \sin(\omega_k t) = 0$ und $\sum \cos^2(\omega_k t) = \sum \sin^2(\omega_k t) = N/2$. Durch Meßzeit und Beobachtungslänge ist somit auch die Frequenzauflösung und die Lage der Testfrequenzen einer Periodensuche festgelegt. Jede Frequenz $\omega_k < \omega < \omega_{k+1}$ ergibt immer nur eine Linearkombination der bekannten Erwartungswerte $I(\omega_k)$ und $I(\omega_{k+1})$ und liefert niemals *neue* Information. Will man das Frequenzauflösung im Periodogramm verbessern, benötigt man eine längere Zeitreihe, d.h. weitere Informationen über den untersuchten Prozeß.

[4] Im englischen Sprachgebrauch verwendet man daher häufig auch den Ausdruck *power spectrum*.

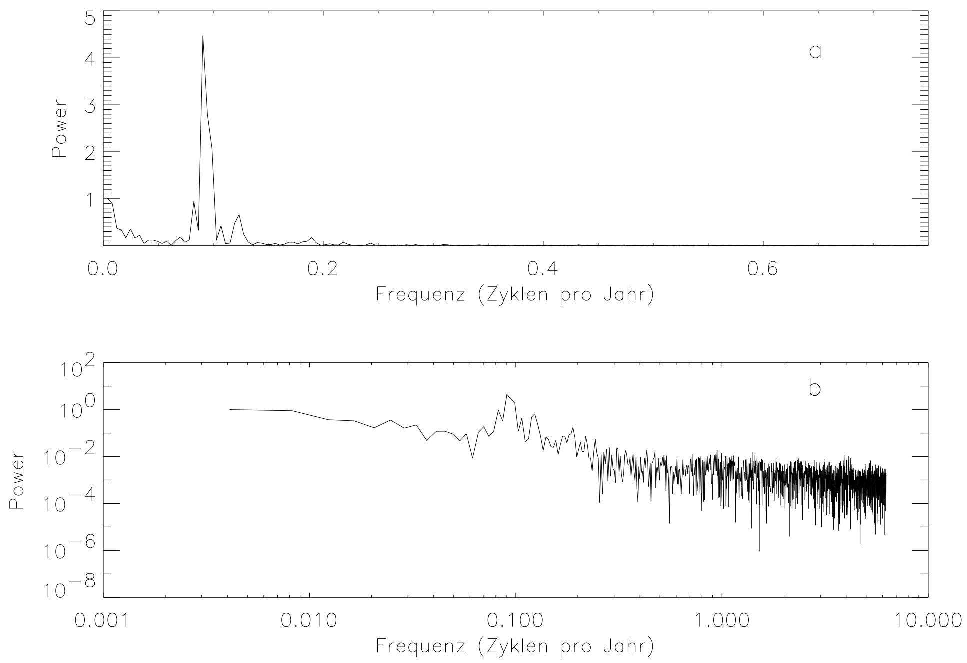


Abbildung 2.3: Periodogramm $I(\omega)$ der Zeitreihe aus Abb. 2.1. Dabei zeigt a) aus Gründen der Übersichtlichkeit nur einen Ausschnitt des Periodogramms und b) das gesamte Periodogramm in doppelt-logarithmischer Darstellung.

schließen, die über die Beobachtungszeit hinausgehen[5]. Auf der anderen Seite bestimmt $\omega'_m = \frac{\pi}{\Delta t}$ die größte noch nachweisbare Frequenz, die man auch als *Nyquistfrequenz* bezeichnet. Die zugehörige kleinste Periode $2 \cdot \Delta t$ drückt dabei den Umstand aus, daß es unmöglich ist, Aussagen über eventuell vorhandene Periodizitäten zu machen, deren Perioden kürzer als die Samplingzeit sind. Betrachtet man z.B. eine Zeitreihe von Tagesmittelwerten einer Meßgröße, so kann man aus den Messungen nichts über die Variabilität *innerhalb* eines Tages aussagen (Priestley 1996). Die sich aus der Definiton der ω_k ergebende Schrittweite der Testfrequenzen bestimmt die Frequenzauflösung im Periodogramm und somit den Fehler einer Periodenbestimmung (s. Kap. 2.3.2). Statt der normierten Kreisfrequenz $\omega \in [\frac{2\pi}{N}, \ldots, \pi]$ verwendet man auch häufig für die Frequenz die Größe $\lambda \in [\frac{1}{N}, \ldots, \frac{1}{2}]$. Für die Zeitreihe der Sonnenfleckenrelativzahlen (s. Abb. 2.1) ergibt die Periodensuche mit Hilfe des Periodogramms eine Periode von $11.04 \pm^{0.52}_{0.48}$ Jahren, in guter Übereinstimmung mit dem Resultat der Autokorrelation der Zeitreihe (s. Abb. 2.2).

Benutzt man bei der Beschreibung der Fourierreihe (Gl. 2.5) komplexe Koeffizienten c_k, so kann man das Periodogramm auch als Quadrat der *Fourier-*

[5]Bei der Periodensuche verwendet man i.a. die Faustregel, daß für die größte noch nachweisbare Periode $P_{max} \leq T_{\mathrm{Ges}}/3$ gelten sollte (Press 1978).

transformierten[6] der Zeitreihe $x(t)$ schreiben.

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x'(t_j)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k t_j} \quad \text{für} \quad \mathrm{x}'(\mathrm{t_j}) = \mathrm{x}(\mathrm{t_j}) - \mu \tag{2.11}$$

$$I(\omega_k) = 2\,N\,c_k\,c_k^* = \frac{2}{N}\left|\sum_{j=1}^{N} x'(t_j)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k t_j}\right|^2 \tag{2.12}$$

Schreibt man diesen Ausdruck für das Periodogramm explizit aus, kann man zeigen, daß das Periodogramm $I(\omega)$ und die Autokovarianzfunktion $R(\Delta)$ ein Paar von Fouriertransformierten bilden.

$$I(\omega_k) = \frac{2}{N}\left[\left(\sum_{i=1}^{N}(x(t_i)-\mu)\cos(\omega_k t_i)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{N}(x(t_i)-\mu)\sin(\omega_k t_i)\right)^2\right]$$

woraus folgt

$$I(\omega_k) = \frac{2}{N}\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(x(t_i)-\mu)\,(x(t_j)-\mu)\,\cos(\omega_k(t_i-t_j))\right]$$

$$I(\omega_k) = 2\sum_{\Delta=-\infty}^{\infty} R(\Delta)\,\cos(\omega_k\Delta) \quad \text{bzw.} \tag{2.13}$$

$$R(\Delta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{\omega_k=-\pi}^{\pi} I(\omega_k)\,\cos(\omega_k\Delta) \tag{2.14}$$

Dieser Zusammenhang, den man auch als *Parseval'sches Theorem* (Schlittgen & Streitberg 1994) bezeichnet, besagt, daß $R(0)$, d.h. die Varianz der Zeitreihe $x(t)$, als Summe über alle $I(\omega)$–Werte geschrieben werden kann. Das Periodogramm zeigt somit an, wie sich die Varianz der Zeitreihe auf die möglichen Frequenzen verteilt. Aufgrund dieses Umstandes wird das Periodogramm, bzw. die Fläche unter dem Periodogramm mitunter auf die Varianz der Zeitreihe normiert[7](Leahy et al. 1983a).

[6] Als (diskrete) Fouriertransformierte einer Zeitreihe $x(t)$ bezeichnet man die Funktion $F_x(\lambda) = \sum_j x_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\lambda t_j}$. Dabei ist eine ihrer wichtigsten Eigenschaften, daß Produkte von Folgen $x(t)\cdot y(t)$ in Faltungen $F_x \otimes F_y$ und Faltungen von Folgen $x(t)\otimes y(t)$ in Produkte $F_x \cdot F_y$ transformiert werden. Umgekehrt kann man aus $F_x(\lambda)$ durch eine Umkehrtransformation auf die Zeitreihe $x(t)$ rückschließen (Schlittgen & Streitberg 1994).

[7] Die Ordinate im Periodogramm trägt dann nicht mehr die Bezeichnung *power* sondern sinngemäß *fractional variance*. Formell werden bei dieser Normierung die Periodogrammwerte durch den Mittelwert der Beobachtung dividiert, was einer Transformation der Zeitreihenvarianz auf 1 gleichkommt.

2.3.2 Probleme bei der Interpretation

Bei den bisher aufgeführten statistischen Kenngrößen handelt es sich um *empirische* Größen (empirische Kovarianz, Periodogramm), die man von den *theoretischen* Größen (theoretische Kovarianz, Spektrum oder Spektraldichte[8]) unterscheidet (Schlittgen & Streitberg 1994; Fuller 1996; Hamilton 1994). Dabei liefern die empirischen Funktionen *Schätzer* für die theoretischen Größen. Mit wachsender Länge der Zeitreihe N beginnt sich z.B. das gemittelte Periodogramm an das theoretische Spektrum anzuschmiegen[9].

$$\lim_{N\to\infty} E[I_N(\lambda)] = 4\pi f(\lambda) \tag{2.15}$$

Eine Aussage, wie verläßlich das Spektrum sich aus dem Periodogramm einer Realisierung schätzen läßt, d.h. wie stark die empirischen Werte $I(w)$ um die theoretischen Werte $f(\lambda)$ streuen, liefert die *empirische Varianz* (Fuller 1996)

$$\mathrm{var}(\mathrm{I_N}(\lambda)) = \frac{1}{\mathrm{M}}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{M}}(\mathrm{I_{N,i}}(\lambda) - \overline{\mathrm{I_N}(\lambda)})^2 \tag{2.16}$$

Hierbei beschreibt $\overline{I_N(\lambda)}$ den Mittelwert von M Periodogrammen verschiedener Realisierungen der Zeitreihe $x(t)$[10]. Man kann zeigen (s. Timmer & König 1995), daß für die empirische Varianz gilt

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{var}(\mathrm{I_N}(\lambda)) = (4\pi\, \mathrm{f}(\lambda))^2. \tag{2.17}$$

Dies bedeutet, daß eine Vergrößerung von N die Realisierungen von $I(\lambda)$ nicht weiter um den wahren Wert $4\pi f(\lambda)$ konzentriert. Vielmehr bleibt immer eine nicht zu kompensierende Fluktuation der Periodogrammwerte, wobei die Amplituden der Schwankungen den Werten den Ordinaten entspricht (Schlittgen & Streitberg 1994). Die Varianz, d.h. die Streubreite der das wahre Spektrum schätzenden Periodogrammwerte ist konstant, sie hängt *nicht* von der Beobachtungslänge N ab. Man bezeichnet das Periodogramm aufgrund dieser unangenehmen Eigenschaft als einen *inkonsistenen Schätzer* des Spektrums[11].

[8]Im Englischen benutzt man äquivalent den Ausdruck *power spectral density*.

[9]Bei diesem Grenzübergang ist wichtig, daß ein Periodogramm immer eine Zufallsvariable bleibt, d.h. immer um das wahre Spektrum schwankt, unabhängig von der Länge der Beobachtung. Man man aber dieses Schwanken durch Mittelwertbildung unterdrücken, sodaß der Erwartungswert das wahre Spektrum liefert.

[10]Diese Mittelwertbildung kann in der Praxis dadurch realisiert werden, daß man eine gemessene Zeitreihe in M einzelne Abschnitte unterteilt und über diese Realisierungen mittelt. Dadurch verkleinert man die Beobachtungslänge und verliert Information im Bereich kleiner Frequenzen. Genaugenommen ist damit auch ein Informationsverlust im interessierenden Frequenzbereich verbunden, da die Fourierfrequenzen durch die verkürzte Beobachtungslänge weniger dicht liegen.

[11]Im Englischen wird daher das Periodogramm als ein *biased estimator* bezeichnet.

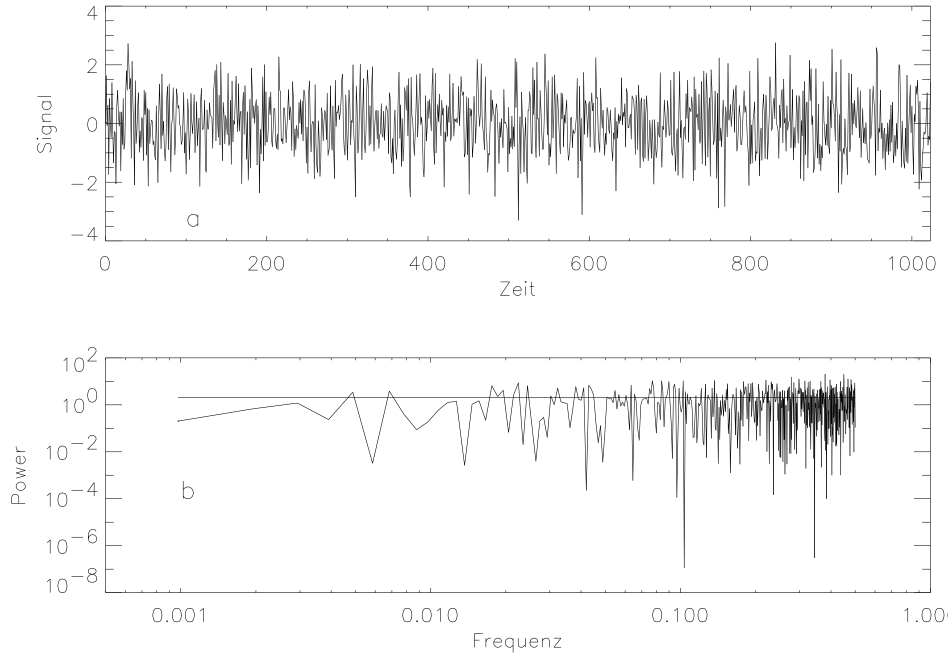


Abbildung 2.4: Weißes Rauschen. a) Zeitreihe mit 1024 Realisierungen des Zufallsprozesses mit $P_x(t) = \mathcal{N}(0,1)$. b) Zugehöriges Periodogramm in doppelt–logarithmischer Darstellung (die durchgezogene Linie markiert den erwarteten Wert des Spektrums).

Das eben Gesagte läßt sich anschaulich am Beispiel eines reinen Zufallsprozesses demonstrieren, bei dem die Zufallsvariablen $x(t)$ identisch verteilt und voneinander unabhängig, d.h. zeitlich nicht korreliert sind (Abb. 2.4a). Solch ein Prozeß, man spricht von *Weißem Rauschen*, besitzt keinerlei *Erinnerungsvermögen*, seine Autokorrelationsfunktion entspricht einer δ–Funktion. Für den Fall von normalverteilten Zufallsvariablen $x(t)$, d.h. für $P_x(t) = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, ergibt sich der konstante Periodogrammwert $2\sigma^2$.

$$\rho_{\mathrm{WN}}(\Delta) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \Delta = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.18}$$

$$I(\lambda)_{\mathrm{WN}} = 2\,\sigma^2 \tag{2.19}$$

Wie man im Periodogramm erkennt (Abb. 2.4b), ist $I(\lambda)$ nicht konstant, sondern streut vielmehr um den erwarteten Wert $4\pi f_{\mathrm{WN}}(\lambda) = 2\sigma^2 = 2$ des Spektrums. Die Periodogrammwerte sind, unabhängig von der Dimension N der Zeitreihe, immer χ^2_2–verteilt, d.h. sie besitzen den Mittelwert 2 und die Varianz 4 (Fuller 1996).

Es existiert eine Reihe unterschiedlicher Verfahren, um zu konsistenten Schätzern des Periodogramms zu gelangen. Man unterteilt diese Verfahren, die allesamt auf einer Glättung des Periodogramms beruhen, in *direkte* und *indirekte* Spektralschätzer (Schlittgen & Streitberg 1994; Chatfield 1989). Bei beiden Methoden entsteht jedoch ein Zielkonflikt, da einerseits eine Glättung im Periodogramm die Varianz eines Periodogrammwertes zwar verringert, zugleich aber auch eine mangelnde Erwartungstreue des Periodogrammschätzer bewirkt, da über Größen mit unterschiedlichen Erwartungswerten gemittelt wird.

Ein direkter Spektralschätzer (z.B. der Daniell-Schätzer, Schlittgen & Streitberg 1994; Fuller 1996) berechnet mittels eines gleitenden Durchschnitts über eine bestimmte Anzahl von Periodogrammwerten ein mittleres Periodogramm[12]. Wie in Gl. 2.14 gezeigt, kann man das Periodogramm als Fouriertransformierte der empirischen Autokorrelationsfunktion $\rho(\Delta)$ schreiben. Da die Autokorrelation eine Mittelung über $x(t) \cdot x(t+\Delta)$ einer endlichen Zeitreihe $x(t)$ darstellt, bedeutet dies, daß die Genauigkeit der Werte für $\rho(\Delta)$ mit zunehmendem Δ abnimmt, da immer weniger Kombinationen $x(t) \cdot x(t+\Delta)$ gebildet werden können. Indirekte Spektralschätzer unterdrücken den Einfluß der Werte von $\rho(\Delta)$ mit großem Δ bei der Fouriertransformation. In der Praxis geschieht dies durch eine mit Δ abfallende Funktion[13], die auf $\rho(\Delta)$ aufmultipliziert wird. Die Fouriertransformation dieses Produktes entspricht dann einer Auffaltung einer lokal glättenden Funktion auf die χ^2_2-verteilte Zufallsvariable Periodogramm (Hamilton 1994). Es ist wichtig zu erwähnen, daß jeder Spektralschätzer eine Mittelung liefert, die auf den vorliegenden Daten, d.h. auf *einer* Realisierung der Zeitreihe, basiert, und demnach niemals das exakte Spektrum liefern kann[14].

Dieser unvermeidbare *bias* $E[I(\lambda)] - 4\pi f(\lambda)$ des Spektralschätzers, d.h. die dem Periodogramm imanente Abweichung vom wahren Spektrum, ist durch das sogenannte *Spektralfenster* W_N des Schätzers festgelegt (Priestley 1996).

$$E[I(\lambda)] \quad = \quad 4\pi f(\lambda) \otimes W_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4\pi\, f(\hat{\lambda}) \cdot W_N(\lambda - \hat{\lambda})\, d\hat{\lambda} \qquad (2.20)$$

Das Spektralfenster[15] W_N, das als Gewichtungsfunktion dem theoretischen Spektrum $f(\lambda)$ aufgefaltet wird, kann ebenso als Fouriertransformierte einer Funktion $\mathcal{W}_N$ interpretiert werden, die der Autokorrelationsfunktion $\rho(\Delta)$ aufmultipli-

[12]Hier empfiehlt es sich, eine ganze Folge verschieden breiter Mittelungsfenster zu testen, um so das Verhalten des Schätzers zu studieren (Priestley 1996).

[13]Bekanntestes Beispiel ist das sog. *Tukey–Fenster* $\lambda_k = \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi k/M))$, $k = 0, 1, \ldots M$. Dabei bestimmt M den Grad der Glättung (Chatfield 1989).

[14]Dieses Dilemma wird auch im Periodogramm des Weißen Rauschens in Abb. 2.4b deutlich. Eine Glättung würde im Bereich kleiner Frequenzen das wahre Spektrum sicher unterschätzen, da in der hier verwendeten Realisierung des Zufallsprozesses *zufällig* große Zeitskalen weniger stark als erwartet vertreten sind. Erst der Mittelwert vieler Realisierungen liefert im asymptotischen Grenzfall das wahre Spektrum.

[15]Der Begriff *Fenster* macht deutlich, daß das Periodogramm *durch* die Funktion W_N auf das wahre Spektrum blickt.

ziert wird[16]. Im einfachsten Fall einer angenommenen Treppenfunktion für $\mathcal{W}_N$ ($\mathcal{W}_N = 1$ für $M \leq N$, 0 sonst) folgt für das Spektralfenster

$$W_N(\lambda) \;=\; F_{\mathcal{W}_\mathrm{N}} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(2\pi\,\lambda\,\left(N+\frac{1}{2}\right))}{\sin(\pi\lambda)} \tag{2.21}$$

Dadurch daß diese Funktion, man bezeichnet sie auch als *Dirichlet–Kern* (Brockwell & Davis 1991; Fuller 1996), neben dem Hauptmaximum am Ursprung noch weitere Nebenmaxima, sog. *side lobes*, besitzt, werden charakteristische Strukturen in $\rho(\Delta)$ durch die Faltung im Periodogramm vervielfältigt abgebildet. Dies wirkt sich zum Beispiel bei der Periodensuche mit Hilfe des Periodogramms sehr nachteilig aus, da aus einem einzelnen Maximum im wahren Spektrum viele Peaks im Periodogramm resultieren. Hierdurch ist eine sichere Identifikation der wahren Periode oft erschwert bzw. unmöglich. Das beobachtete Auftreten *zusätzlicher* Maxima wird als *spectral leakage*, also als *Durchsickern spektraler Masse* (Schlittgen & Streitberg 1994) bezeichnet. In diesem Zusammenhang ist wichtig, daß die Nebenmaxima im Spektralfenster des Periodogramms nicht auf die Wahl von $\mathcal{W}_N$ zurückzuführen sind, sondern auf die unvermeidbare *endliche* Dimension N der gemessenen Zeitreihe, die dem Periodogramm zugrundeliegt (Hamilton 1994; Fuller 1996). Die beobachtete Realisierung $x(t_i)$, $i = 1, 2, \ldots N$, des Prozesses beschreibt nur einen endlichen Ausschnitt einer prinzipiell *unendlich* langen Zeitreihe $x_\infty(t_i)$, $-\infty \leq i \leq \infty$ (Hamilton 1994).

$$x(t) \;=\; D(t)\cdot x_\infty(t) \quad \text{mit} \quad D(t_i) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots N \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.22}$$

Berechnet man nun das Periodogramm der Zeitreihe $x(t)$, wird das *Beobachtungsfenster* $D(t)$, bzw. das zugehörige Periodogramm auf das Spektrum (s. Gl. 2.20) aufgefaltet.

$$\begin{aligned} I(\lambda) \;&=\; \frac{2}{N}\left|F_{x_\infty\cdot D}\right|^2 = \frac{2}{N}\left|F_{x_\infty}\otimes F_D\right|^2 \\ &=\; \frac{2}{N}\left|F_{x_\infty}\right|^2 \otimes \frac{2}{N}|F_D|^2 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Das Periodogramm des Beobachtungsfensters[17] besitzt nun wiederum *side lobes*, die, auf das wahre Spektrum aufgefaltet, eine Interpretation der Periodogramms erschweren. Man kann versuchen, durch eine Modifikation des Rechteck-Datenfensters $D(t)$, in der Praxis geschieht dies durch Glättung von $D(t)$ (sog. *tapering*), die *side lobes* zu unterdrücken und die Fouriertransformierte F_D stärker um $\lambda = 0$ zu konzentrieren (Hamilton 1994; Priestley 1996).

[16] Im Englischen bezeichnet man $\mathcal{W}_N$ daher auch als *lag window*.

[17] Man bezeichnet $\frac{2}{N}|F_D|^2$ auch als sog. *Fejer-Kern* V_N, der sich aus dem schon bekannten Dirichlet-Kern ableitet $V_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N}\sum W_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin^2(N\lambda/2)}{\sin^2(\lambda/2)}$ (Brockwell & Davis 1991).

In der Astronomie sind Zeitreihen in der Regel keine äquidistant gemessenen Reihen, da oftmals Unterbrechungen (Tag– und Nachtzyklus, Erdokkultationen bei Satellitenbeobachtungen) eine kontinuierliche Beobachtung des Objektes verhindern. Dadurch entsteht ein komplexes Beobachtunsgfenster $D(t)$, das sich in seinem störenden Einfluß auf das Periodogramm durch *tapering* kaum unterdrücken läßt. Da dieses zentrale Problem der astronomischen Zeitreihenanalyse nicht analytisch gelöst werden kann, wurden eine Reihe von Verfahrensweisen entwickelt, die ich im folgenden kurz besprechen möchte.

Den Einfluß, den ungleichmäßig gemessene Datenpunkte, sog. *unevenly sampled data*, auf das Periodogramm besitzen, kann man durch die Untersuchung von F_D abschätzen (Deeming 1975; Lomb 1976; Leahy et al. 1983a). So lassen sich Signifikanzniveaus im Periodogramm festlegen, die statistische Aussagen darüber erlauben, wie wahrscheinlich es ist, daß eine im Periodogramm auftretende Struktur *nicht* durch Weißes Rauschen entstanden sein kann (Scargle 1982; Schwarzenberg-Czerny 1991; Grison 1994; Horne & Baliunas 1986).

Desweiteren kann man versuchen, alle Strukturen aus dem Periodogramm zu entfernen, die durch die F_D–Auffaltung entstehen[18] (Schwarz 1978; Roberts et al. 1987; Barthes 1995). Es wird auch versucht, indirekte Spektralschätzer zu benutzen, um die Störungen durch das Beobachtungsfenster zu unterdrücken. Man verwendet hierzu oft auch modifizierte Autokorrelationsfunktionen (Burki et al. 1978; Edelson & Krolik 1988; Scargle 1989).

Eine Alternative zu den Fouriertechniken bei der Periodensuche bietet das sog. *epoch folding*, bei dem auftretenden Struktur im *Pulsprofil*[19] als Indiz für eine vorliegenden Periodizität gedeutet wird (Davies 1990; Done et al. 1992; Gregory & Loredo 1992; König 1994). Ein großer Vorteil dieses Verfahrens liegt darin, daß es nicht wie das Periodogramm auf Orthogonalitätsrelationen der Fourierfrequenzen aufbaut, sondern eine freie Wahl der Testperioden bei der Periodensuche erlaubt. Ein weiterer Pluspunkt dieser Methode der Periodensuche gegenüber dem Periodogramm liegt darin, daß sie eine deutlich größere Empfindlichkeit bei nicht-sinusförmigen periodischen Strukturen aufweist (Leahy et al. 1983b).

Eine synoptische Abhandlung aller gängiger Verfahren findet man in Buccheri (1992) und Carbonell et al. (1992).

Bei der Diskussion der Eigenschaften des Periodogramms wurde immer wieder auf Schwierigkeiten bei der Interpretation in Bezug auf die etwaige Präsenz einer Periodizität der untersuchten Zeitreihe hingewiesen. Hierbei ist zu bemerken, daß die, durch die Endlichkeit der beobachteten Realisierung hervorgerufenen, störenden Effekte im Periodogramm natürlich nicht nur bei der Analyse der Zeitreihe

[18]Diese sog. *CLEAN* Verfahren benötigen jedoch als Ausgangspunkt eine Struktur im Periodogramm (z.B. eine bekannte Periode), die nicht auf das Beobachtungsfenster zurückgeht. Hierdurch besitzen diese Verfahren eher kosmetische als praktische Bedeutung.

[19]Das Pulsprofil ergibt sich als Sortierung der Zeitreihe $x(t)$ bezüglich der Phasenlage $\phi = [t_i/P_{\mathrm{Test}}]$ der Einzelmessungen bezogen auf die Testperiode P_{Test}.

einer vermeintlich periodischen Quelle eine Rolle spielen, sondern daß auch das Periodogramm von variablen, nicht-periodischen Zeitreihen durch *spectral leakage* nachhaltig gestört wird (Deeter & Boynton 1982, Deeter 1984). Die Klasse dieser *aperiodischen* Zeitreihen wird dadurch definiert, daß man das Verhalten der Zeitreihe, im Gegensatz zu periodischen Prozessen, nicht vorhersagen kann. Zu dieser Klasse zählen die *stochastischen* Prozesse, wie sie in Kap. 3 behandelt werden und die *chaotischen* Prozesse, deren irreguläres Verhalten man korrekterweise auf *deterministisch-nichtlineare* Wechselwirkungen zurückführt[20].

Die Beeinflussung von Periodogrammen aperiodischer Zeitreihen durch die Auffaltung der Windowfunktion bei der Analyse im Frequenzraum, wird am Beispiel der Röntgenlichtkurven Aktiver Galaxien in Kap. 5.1.1 diskutiert. Eine (scheinbar) einfache Möglichkeit, diese beobachtungsbedingten Störungen zu vermeiden, liegt in einem Auffüllen vorhandener Lücken der Zeitreihe. Geschieht diese Interpolation durch Weißes Rauschen (oder angepasste Polynome), so werden neue Zeitabhängigkeiten in der Zeitreihe generiert, die, ähnlich dem Einfluß durch Beobachtungslücken, das wahre Spektrum verschleiern. Das Auffüllen mit künstlichen Werten ist nur dann sinnvoll, wenn die Lücken im Vergleich zu den charakteristischen Zeitskalen des Prozesses nicht zu lang sind und wenn die Prozessdynamik als hinreichend gut bekannt vorausgesetzt werden kann (s. App. 1.3).

[20]Mit dieser Terminologie wird der Umstand ausgedrückt, daß sich die Dynamik chaotischer Systeme durch definierte, nichtlineare Differentialgleichungen ausdrücken läßt. Bei der numerischen Lösung zeigt sich, daß, egal mit welcher Genauigkeit die Anfangsbedingungen bestimmt werden, das zukünftige Verhalten nicht vorhersagbar ist. Man spricht von *deterministischem Chaos* (Canty 1995).

Kapitel 3

Stationäre Zufallsprozesse

3.1 Stochastische Prozesse

3.1.1 Moving Average Prozesse

Eine allgemeine Methode zur Beschreibung einer Zeitreihe $x(t)$ ist ihre Darstellung als Funktion elementarer Zeitreihen (Fuller 1996). Im einfachsten Fall verwendet man für diese elementaren Zeitreihen unkorreliertes Weißes Rauschen $\epsilon(t) \in \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

$$x(t) \quad = \quad \sum_{i=0}^{q} b_i \, \epsilon_{t-i} \quad \text{mit} \quad t \in (0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \quad b_i \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

Die so definierte Zeitreihe $x(t)$ wird als *moving average* Prozeß , kurz MA-Prozeß, bezeichnet[1]. Dabei bestimmt die Ordnung q des Prozesses, wie stark vergangene Messungen den aktuellen Meßwert beeinflussen. Ein MA[q] Prozeß besitzt den Erwartungswert und die Kovarianz

$$E[x(t)] \quad = \quad 0 \tag{3.2}$$

$$R(\Delta) \quad = \quad E[x(t)x(t+\Delta)] = \begin{cases} \sum_{i=0}^{q-|\Delta|} b_i \, b_{q-|\Delta|} \, \sigma^2, & 0 \leq |\Delta| \leq q \\ 0, & |\Delta| > q. \end{cases} \tag{3.3}$$

Man erkennt, daß, da $R(\Delta)$ beschränkt ist, MA[q] Prozesse immer kovarianzstationär sind. Für den einfachsten Fall eines MA[1] Prozesses gilt $b_0 = 1$ und $b_1 = b$, d.h. es ist $x(t) = b \, \epsilon(t-1) + \epsilon(t)$. Nach der Normierung mit der Varianz

[1] Man verwendet in der Zeitreihenanalyse mitunter auch die *zweiseitige* Formulierung des MA[q]-Prozesses $\sum_{i=-q}^{q}$. Dieser allgemeineren Terminologie verdankt der Prozeß seinen Namen, da man $x(t)$ als *momentanen Mittelwert* der $\epsilon(t)$ Reihe deuten kann. Diese Darstellung kann jedoch durch eine Substitution der Indizes auf die *einseitige* Form umgeschrieben werden.

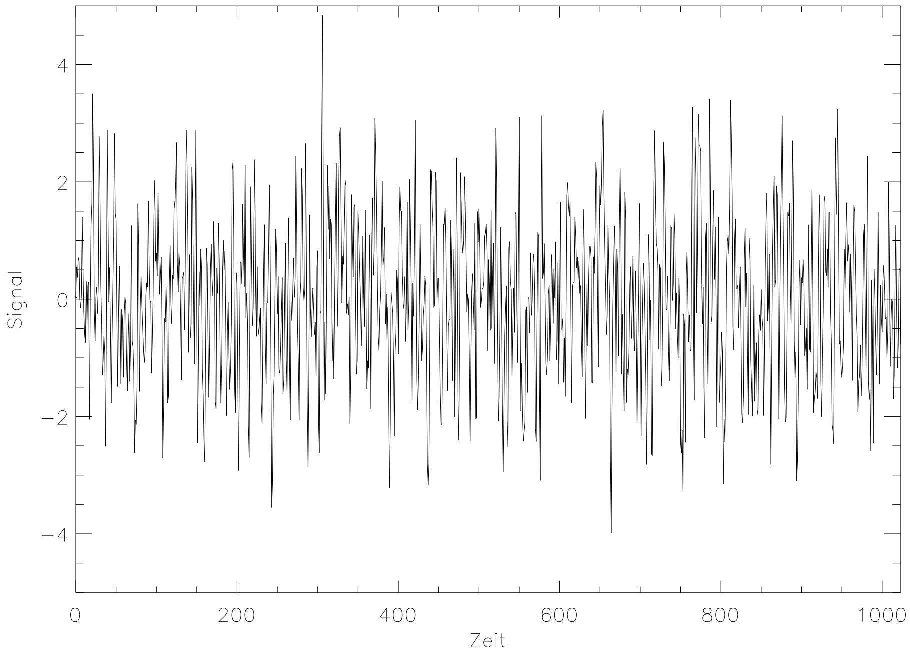


Abbildung 3.1: Zeitreihe mit 1024 Realisierungen eines MA[1] Prozesses für $b = 0.8$ und $\epsilon(t) \in \mathcal{N}(0,1)$. .

der Zeitreihe $(1 + b^2)\sigma^2$ folgt für die Autokorrelationsfunktion[2]

$$\rho_{\mathrm{MA[1]}}(\Delta) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \Delta = 0 \\ -\frac{b}{1+b^2} & \text{für} \quad |\Delta| = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.4}$$

Wie man sieht, sind bei einem MA[1] Prozeß nur direkt aufeinanderfolgende Werte der Zeitreihe miteinander korreliert (s. Abb. 3.2). Weiter voneinander entfernt liegende Werte von $x(t)$ und $x(t + \Delta)$ zeigen keine Korrelation (s. Abb. 3.3). Für MA Prozesse höherer Ordnung ($q > 1$) besteht in analoger Weise dieser Zusammenhang $\rho(\Delta) \neq 0$ für $\Delta \leq q$ (Fuller 1996).

Für einen, wie in Gl. 3.1 definierten, MA[q] Prozess ergibt sich das theoretische Spektrum zu

$$f(\lambda) \quad = \quad \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{j=0}^{q} b_j \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\lambda\mathrm{j}} \right|^2 \cdot \sigma^2 \tag{3.5}$$

[2]Dabei wird der Ausdruck $\rho(1)$ für $b = \pm 1$ maximal bzw. minimal, d.h. es gilt $\rho(1) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, unabhängig von b. Diese Beschränkung der Autokorrelationsfunktion kann zur Identifizierung von MA Prozessen verwendet werden (Schlittgen & Streitberg 1994).

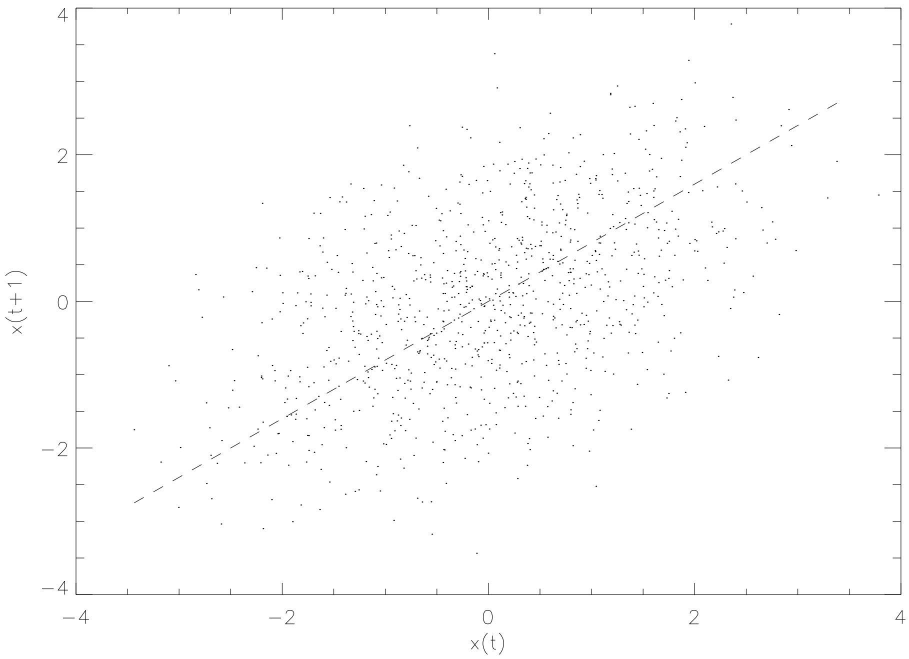


Abbildung 3.2: Korrelation der Werte $x(t)$ und $x(t+1)$ der Zeitreihe aus Abb. 3.1. Die Steigung der eingezeichneten Geraden entspricht dem Korrelationskoeffizienten $\rho(1) = 0.488$.

Interpretiert man den MA Prozeß als einen linearen Filter[3] (Wei 1990), der auf eine Zeitreihe von Weißem Rauschen angewandt wird, so ergibt sich das Spektrum als Produkt der Varianz des Weißen Rauschens mit der quadrierten Transferfunktion des Filters. Für den einfachsten Fall eines MA[1] Prozesses folgt für das zugehörige Spektrum

$$f_{\mathrm{MA}[1]}(\lambda) \quad = \quad \frac{\sigma^2}{2\pi}(1 + b^2 + 2\,b\,\cos(2\pi\lambda)) \qquad (3.6)$$

Aufgrund der Kosinusabhängigkeit des MA[1] Spektrums ergibt sich für $b > 0$ ein stärkerer Beitrag zur Varianz der Zeitreihe durch Schwingungen kleiner Frequenz (s. Abb. 3.4). Umgekehrt wird für $b < 0$ die Variabilität durch kurzwellige Schwingungen dominiert.

[3]Man nimmt hierbei an, daß der lineare Filter β in $x(t) = \beta(B) \cdot \epsilon(t)$ auf das als Eingabe fungierende Weiße Rauschen wirkt. Dabei ist $\beta(B) = 1 + b_1\,B + b_2\,B^2 \ldots$ die Filterfunktion und B beschreibt den *backshift* Operator $B^u\,\epsilon(t) = \epsilon(t-u)$. Einseitige lineare Filter, die zu MA Prozessen führen, bezeichnet man als *kausale* Filter, da die Werte für $x(t)$ nur von Vergangenheit und Gegenwart abhängen (Priestley 1996).

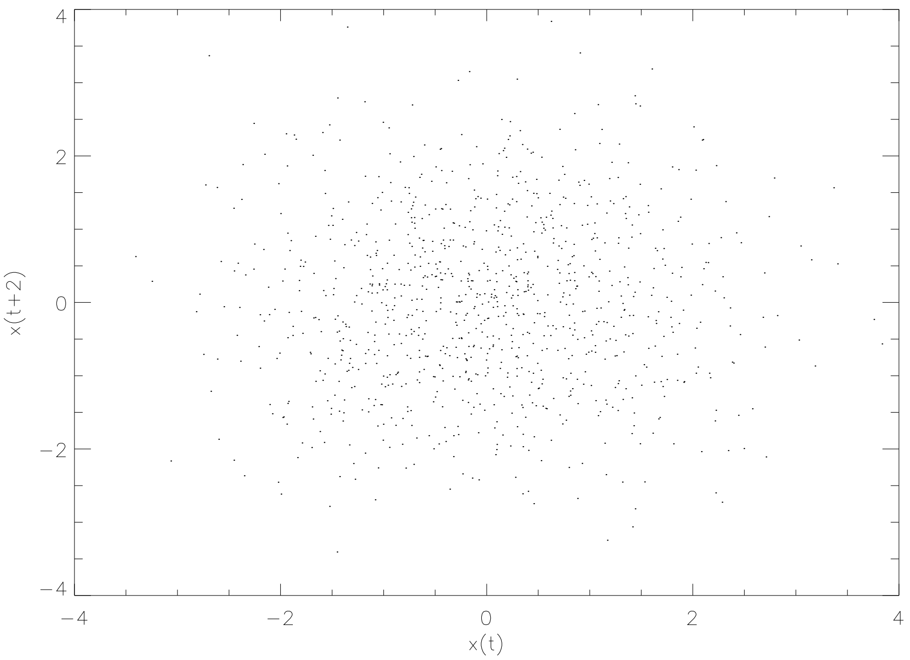


Abbildung 3.3: Korrelation der Werte $x(t)$ und $x(t+2)$ der Zeitreihe aus Abb. 3.1.

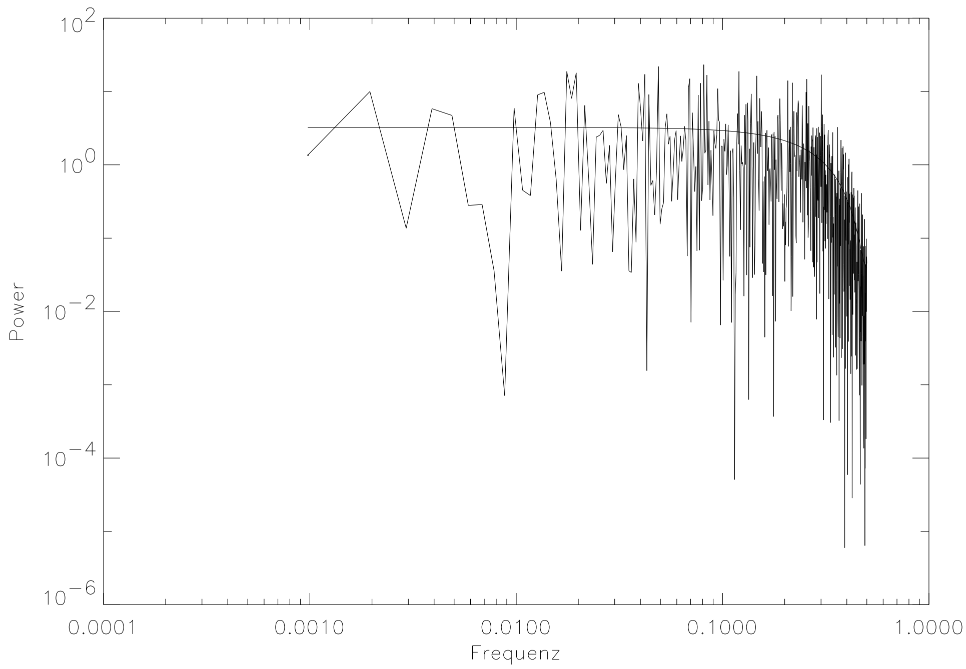


Abbildung 3.4: Periodogramm eines MA[1] Prozesses mit $b = 0.8$ (die durchgezogene Linie beschreibt das zugehörige Spektrum).

3.1.2 Autoregressive Prozesse

Geht man von einem reinen Zufallsprozess, wie z.B. Weißem Rauschen aus, bei dem die Werte $x(t)$ der zugehörigen Zeitreihe unkorreliert sind, ergibt sich als erste mögliche Korrelation eine Abhängigkeit direkt aufeinanderfolgender Werte $x(t)$ und $x(t+1)$. Man bezeichnet die dadurch definierte Klasse stochastischer Prozesse als *Lineare Markov Prozesse* oder allgemeiner als *Autoregressive Prozesse 1. Ordnung*[4], kurz AR[1] Prozesse.

$$x(t) \;=\; a\,x(t-1) + \epsilon(t) \tag{3.7}$$

Wie schon bei MA Prozeß in Gl. 3.1 bezeichnet $\epsilon(t)$ einen unkorrelierten, stationären Zufallsprozess, im einfachsten Fall Weißes Rauschen $\epsilon(t) \in \mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Die Konstante a bestimmt die Stärke der Beeinflussung des momentanen Wertes durch den vorhergehenden Wert in der Zeitreihe. Erweitert man den Grad der Beeinflussung auf noch weiter in der Vergangenheit liegende Werte $x(t-p)$, so gelangt man zur Beschreibung allgemeiner Autoregressiver Prozesse der Ordnung p (AR[p] Prozesse).

$$x(t) \;=\; \sum_{i=1}^{p} a_i\,x(t-1) + \epsilon(t) \tag{3.8}$$

Um die statistischen Kenngrößen der AR[p] Prozesse zu bestimmen, empfiehlt es sich, Gl. (3.8) auf die schon bei MA[q] Prozessen benutzte Form eines kausalen linearen Filters umzuschreiben. Hierbei benutzt man wiederum den *backshift* Operator B (mit $B^u x(t) = x(t-u)$), um die Wirkung des Filters auf die Zeitreihe $x(t)$ darzustellen.

$$\begin{aligned}\epsilon(t) \;&=\; (1 - a_1\,B - a_2\,B^2 - \ldots - a_p\,B^p)\cdot x(t)\\ &=\; \alpha(p,B)\cdot x(t)\end{aligned} \tag{3.9}$$

In Form der Gl. (3.9) wird deutlich, daß sich die per. def. stationäre Zeitreihe $\epsilon(t)$ durch Filtration aus dem Prozeß $x(t)$ gewinnen läßt. Die Frage, ob nun $x(t)$ auch einen stationären Prozeß beschreibt, entspricht der Frage, ob die Wirkung des Filter $\alpha(p,B)$ umkehrbar ist, d.h. ob ein Filter $\alpha^{-1}(p,B)$ existiert, für den $\alpha^{-1}\cdot\alpha = 1$ gilt (Priestley 1996). Mit $\epsilon(t)$ ist dann auch die Zeitreihe $x(t)$ stationär.

$$x(t) \;=\; \alpha^{-1}(p,B)\cdot\epsilon(t) \tag{3.10}$$

Die Frage nach der Invertierbarkeit des Filters $\alpha(p,B)$ reduziert sich auf die nach der Lage der Nullstellen z_i $(i = 1\ldots p)$ des *charakteristischen Polynoms* des Filters $\alpha(p,z)$.

$$\alpha(p,z) \;=\; 1 - a_1\,z - a_2\,z^2 - \ldots - a_p\,z^p = 0 \tag{3.11}$$

[4]Die verwendete Terminologie *Auto-Regressiv* drückt dabei den Umstand aus, daß ein Wert der Zeitreihe $x(t)$ auf Vergangenheitswerte derselben Zeitreihe zurückgeht. Ein AR Prozess beschreibt also, abstrakt gesprochen, eine Korrelation des treibenden Weißen Rauschens $\epsilon(t)$.

Der kausale Filter $\alpha(p,z)$ läßt sich genau dann mit Hilfe seiner Nullstellen z_i darstellen, wenn er eine absolut summierbare Koeffizientenfolge[5] besitzt, d.h. wenn die Nullstellen *außerhalb* des Einheitskreises $|z_i| > 1$ liegen (Schlittgen & Streitberg 1994).

$$\begin{aligned} \alpha(p,z) &= c \cdot \left(1 - \frac{z}{z_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{z}{z_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{z}{z_p}\right) \\ &\quad \text{mit} \quad c = (-a_p)(-1)^p \, z_1 \, z_2 \ldots z_p \end{aligned} \tag{3.12}$$

Aus dieser Entwicklung kann man den gesuchten Filter α^{-1} direkt als Produkt einzelner Reihenentwicklungen[6] ableiten (Schlittgen & Streitberg 1994).

$$\alpha^{-1}(p,z) = \frac{1}{c} \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{1 - \frac{z}{z_i}} = \frac{1}{c} \prod_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z_i}\right)^j z^j \tag{3.13}$$

Das Kriterium der Invertierbarkeit impliziert nicht nur die Stationarität der Zeitreihe $x(t)$, sondern ist auch bei der *Parameterschätzung* (s. Kap. 3.5) von großer Bedeutung, wo versucht wird, die AR[p] Modellparameter aus der Zeitreihe zu schätzen (Schlittgen & Streitberg 1994).

Für den Fall des AR[1] Prozesses (Gl. 3.7) ergibt sich $\epsilon(t) = \alpha(1,B)\,x(t)$ mit dem Filter $\alpha(1,z) = 1 - a\,z$ und der einzigen Nullstelle bei $z_1 = \frac{1}{a}$. Die AR[1] Zeitreihe ist demnach nur dann stationär, wenn die Nullstelle außerhalb des Einheitskreises liegt, d.h. wenn $|a| < 1$ ist[7].

Mit diesen Vorarbeiten lassen sich für AR[p] Prozesse die statistischen Kenngrößen Mittelwert und Kovarianz berechnen.

$$E[x(t)] = 0 \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} R(\Delta) &= E[x(t)x(t+\Delta)] \\ &= a_1\,E[x(t-1)x(t+\Delta)] + a_2\,E[x(t-2)x(t+\Delta)] + \ldots \\ &\quad + a_p\,E[x(t-p)x(t+\Delta)] \\ &= a_1\,R(\Delta-1) + a_2\,R(\Delta-2) + \ldots + a_p\,R(\Delta-p) \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{pmatrix} R(1) \\ R(2) \\ \vdots \\ R(p-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & R(1) & \ldots & R(p-1) \\ R(1) & \sigma^2 & \ldots & R(p-2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R(p-1) & R(p-2) & \ldots & \sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$$

[5] Ein Filter $\alpha(p,z)$ wird als absolut summierbar bezeichnet, wenn $|\alpha(p,z)| = |\sum a_u z^u| \le \sum |a_u||z^u| \le \sum |a_u| < \infty$ gilt.

[6] Dabei verwendet man bei den einzelnen Reihenentwicklungen den Grenzwert der geometrischen Reihe $\sum_{u=0}^{\infty} (\frac{1}{z_i})^u z^u = \frac{1}{1-\frac{z}{z_i}}$ für $|z_i| > 1$.

[7] Der Fall $a = 1$, in der Literatur als *random walk* bezeichnet, beschreibt den instationären Grenzfall eines AR[1] Prozesses, bei dem die Nullstelle genau auf dem Einheitskreis zu liegen kommt.

Diese rekursive Beziehung der Autokovarianzwerte, man bezeichnet sie als *Yule-Walker* Gleichungen, erlauben die iterative Berechnung von $R(\Delta)$. Die Größe σ^2 bezeichnet die Varianz der Zeitreihe $x(t)$[8]. Für den AR[1] Prozeß ergibt sich aus der zugehörigen *Yule-Walker* Gleichung die Autokovarianz

$$\begin{aligned} R(\Delta) &= \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-a^2}\, a^\Delta \\ &= \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-a^2}\, \mathrm{e}^{-\frac{\Delta}{\tau}} \quad \text{mit} \quad \tau = -\frac{1}{\log_\mathrm{e}(\mathrm{a})} \end{aligned} \tag{3.16}$$

Die Autokovarianz bzw. die Autokorrelation eines stationären AR[1] Prozesses ($|a| < 1$) ist eine exponentiell mit der Zerfallzeit τ über die Zeit zerfallende Funktion. Wie schon in Kap. 2.2 diskutiert, entspricht diese Abnahme der Korrelation mit zunehmenden Δ einem *Erinnerungsverlust* des Prozesses. Diese, die Autokorrelation bestimmende Eigenschaft des AR[1] Prozesses, führte, zusammen mit der Dynamik bekannter *shot noise* Modelle (s. App. 1.2), zum Begriffsbild des *Relaxators*. Damit meint man einen einzelnen, zeitlich exponentiell zerfallenden, d.h. *relaxierenden*, Puls. Eine stochastische Überlagerung derartiger Elementarereignisse ($\rightarrow$ *shot noise*, s. App. 1.2) führt zu einer funktional ähnlichen Autokorrelationsfunktion[9]. Es zeigt sich, daß die Zeitskalen, die einer AR[1] Zeitreihe ihr typisches Aussehen verleihen, von der Größenordnung der Zerfallszeit des Relaxators (Relaxationszeit τ) sind (s. Abb. 3.5).

Bestimmt man die Autokorrelationsfunktion für AR[p>1] Prozesse, so ergeben sich neben reinen Relaxatoren auch exponentiell gedämpfte Oszillatoren, wenn die Nullstellen des charakteristischen Polynoms komplex sind (Schlittgen & Streitberg 1994). Dabei bestimmt die Ordnung p des AR[p] Prozesses die Anzahl der auftretenden Relaxatoren, der gedämpften Oszillatoren und deren Kombinationen. So kann etwa ein AR[2] Prozeß durch eine gedämpfte Schwingung mit zwei Parametern für die Dämpfung τ und die Periode P oder aber durch zwei Relaxatoren, d.h. durch zwei unterschiedliche Relaxationszeiten τ_1 und τ_2 definiert werden[10].

[8]Für den AR[1] Prozeß $x(t) = \alpha^{-1}(1, B) \cdot \epsilon(t) = \frac{1}{1-aB} \cdot \epsilon(t) = \sum_{u=0}^{\infty} a^u \epsilon(t-u)$ ergibt sich für die Varianz $\sigma^2 = \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} a^u a^v R_\epsilon(u-v) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-a^2}$. Hierbei bezeichnet σ_ϵ^2 die Varianz des reinen Zufallsprozesses $\epsilon(t)$.

[9]Wie sich zeigt, stellt *shot noise* einen Grenzfall der allgemeineren AR Formulierung dar (König & Timmer 1997).

[10]Die Lösungen der charakteristischen Gleichung der linearen Filterfunktion eines AR[2] Prozesses sind $z_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2a_2}$. Je nachdem, ob die Lösungen reell oder konjugiert komplex sind, ergeben sich zwei Relaxatoren oder ein gedämpfter Relaxator. Im letzteren Fall folgt für die Autokorrelationsfunktion $\rho(\Delta) = a_2^{-\Delta}\frac{sin(\theta\Delta+\psi)}{sin(\psi)}$ mit $tan(\psi) = \frac{1+a_2}{1-a_2} tan(\theta)$ und $cos(\theta) = \frac{-a_1}{2\sqrt{a_2}}$. Dabei bestimmt a_2 den Grad der Dämpfung und $\theta(a_1, a_2)$ die Frequenz der Schwingung.

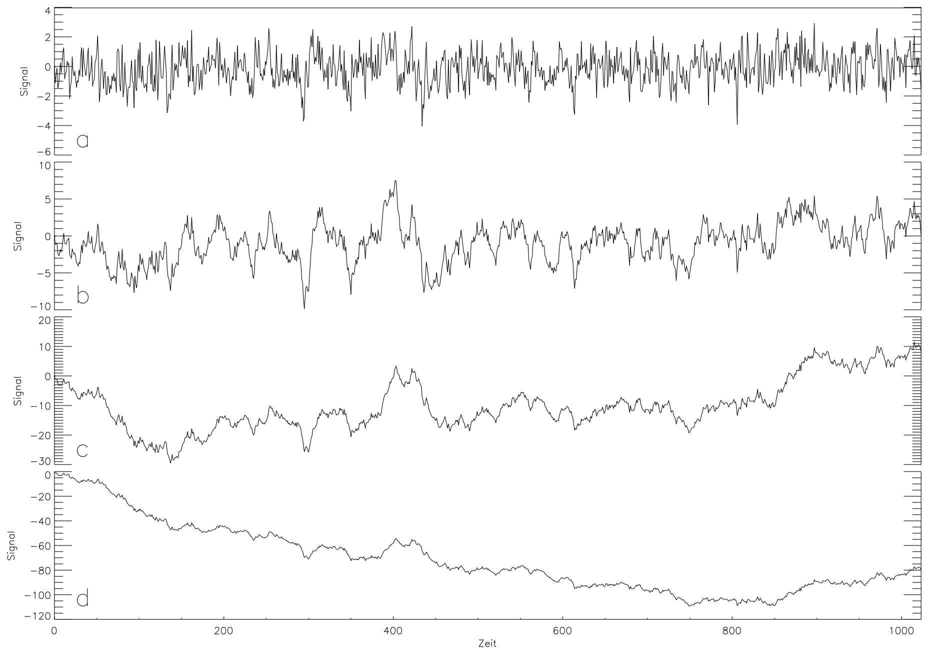


Abbildung 3.5: Realisierungen von AR[1] Prozessen. Dabei wurden die Relaxationszeiten a) $\tau = 1$, b) $\tau = 10$, c) $\tau = 100$ und d) $\tau = 1000$ verwendet. Alle Realisierungen verwenden die gleiche Zeitreihe $\epsilon(t)$ mit $\epsilon \in \mathcal{N}(0,1)$. Man erkennt, daß die Zeitreihe in d) durch einen linearen Trend dominiert wird, da hier Relaxationszeit und Reihendimension übereinstimmen. Hier ist das Kriterium der Stationarität verletzt (s. Kap. 2.1 und Kap. 5.2).

Mit Hilfe der Autokorrelationsfunktion (s. Gl. 3.16) kann man das theoretische AR[p] Spektrum bestimmen zu (Fuller 1996)

$$f(\lambda) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{|1 - a_1 e^{i2\pi\lambda} - a_2 e^{i2\pi 2\lambda} - \ldots - a_p e^{i2\pi p\lambda}|^2} \quad . \tag{3.17}$$

Ein AR[1] Prozeß besitzt das Spektrum

$$f_{\mathrm{AR[1]}}(\lambda) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 + a_2^2 - 2a_1 \cos(2\pi\lambda)} \tag{3.18}$$

Man kann zeigen, daß sich für stationäre Prozesse $x(t)$ integrierbare Spektren $f(\lambda)$ ergeben (s. App. 1.1). Im Fall eines AR[1] Prozesses besitzt die Stammfunktion $F(\lambda) = \int f(\lambda)\, d\lambda$ für nicht-stationäre Zeitreihen ($a \geq 1$) eine Polstelle für $\lambda = 0$, d.h. daß die Zeitreihe $x(t)$ auf langen Zeitskalen beliebig große Werte

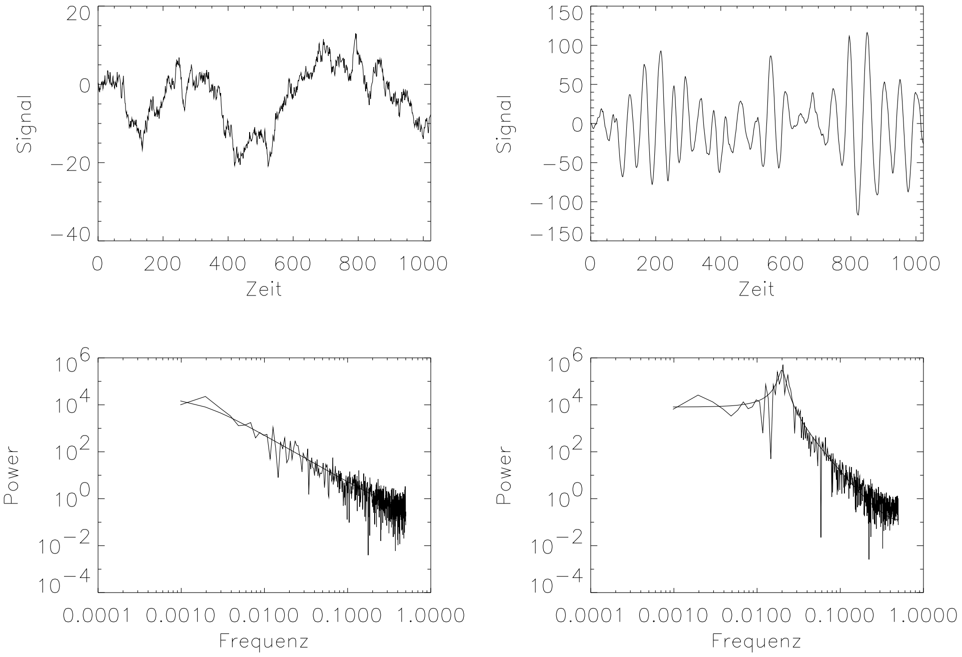


Abbildung 3.6: Zeitreihe (oben) und Periodogramm (unten) eines AR[1] (links) und eines AR[2] Prozesses (rechts). Die durchgezogenen Linien in den Periodogrammen zeigen den theoretischen Verlauf des jeweiligen Spektrums. Bei der Simulation der AR Zeitreihen wurde in beiden Fällen dieselbe Rauschrealisierung $\epsilon(t) \in \mathcal{N}(0,1)$ verwendet (AR[1]: $\tau = 100$ und AR[2]: $\tau = 100$, $P = 50$).

annehmen kann. Besitzt ein AR[p] Prozeß höherer Ordnung ($p \geq 2$) eine durch das Auftreten gedämpfter Oszillatoren eine periodische Komponente, so zeigt sich diese *deterministische* Komponente der Zeitreihe in einem lokalen Maxima des zugehörigen Spektrums (s. Abb. 3.6). Genaugenommen handelt es sich hier nicht um streng periodische Komponente, sondern um ein quasi-periodisches Verhalten des Prozesses. Durch die Dämpfung zerfällt die strenge zyklische Korrelation der Zeitreihe. Stellt man den AR[2] Prozeß als kontinuierlichen Prozeß dar, kann man schreiben:

$$\ddot{x}(t) + c_1 \dot{x}(t) + c_2 x(t) = \epsilon(t) \quad . \tag{3.19}$$

Diese Differentialgleichung tritt bei vielen *realen* Schwingungen auf, bei denen Reibungskräfte ($\propto$ Geschwindigkeit $\dot{x}$) wirken. Dabei fungiert $\epsilon(t)$ als antreibende Kraft, die durch stochastisch verteilte Impulse die gedämpfte Schwingung aufrecht erhält[11].

[11]Dieses Analogon wurde von G.U.Yule 1927 eingeführt, der die antreibende Kraft mit einem Jungen verglich, der, mittels Beschuß des Pendels mit seiner Steinschleuder, dieses immer wieder

3.1.3 ARMA Prozesse

Kombiniert man die vorgestellten Klassen stochastischer Prozesse, erhält man die allgemeinste Form stochastischer Prozesse. Es sind dies die *Autoregressiven-Moving-Average Prozesse*, die man auch als ARMA[p,q] Prozesse bezeichnet (Fuller 1996).

$$x(t) \quad = \quad \sum_{i=1}^{p} a_i \, x(t-i) + \sum_{j=1}^{q} b_j \, \epsilon(t-j) + \epsilon(t) \tag{3.20}$$

Diese Kombination von zurückliegenden Werten der Zeitreihe und des antreibenden stochastischen Prozesses trägt der Tatsache Rechnung, daß es in vielen dynamischen Systemen zu Rückkopplungen, sog. *feedback*, kommt (Beyer et al. 1978). Damit werden Prozesse definiert, die von mehreren Größen abhängen, die ihrerseits untereinander durch gegebene Abhängigkeiten verbunden sind. Ein bekanntes Beispiel sind hierbei *Lagerhaltungs–Produktionsmodelle* aus der Ökonometrie[12] (Schlittgen & Streitberg 1994).

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 \, y(t-1) + \epsilon(t) \\ y(t) &= a_2 \, x(t-1) + \epsilon'(t) \end{aligned}$$

Dabei sind ϵ und ϵ' zwei unabhängige, Gaussverteilte Zufallsprozesse, wobei sich ein Prozeß durch Renormierung aus dem Modell entfernen läßt.

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 a_2 \, x(t-2) + a_1 \, \epsilon'(t-1) + \epsilon(t) \\ x(t) &= a_1 a_2 \, x(t-2) + a'_1 \, \epsilon(t-1) + \epsilon(t) \quad \text{mit} \quad a'_1 = \frac{a_1 \sigma_\epsilon}{\sigma_{\epsilon'}} \end{aligned}$$

Die Zeitreihe $x(t)$ läßt sich somit als ARMA[2,1] Prozess beschreiben. Wie schon bei den AR[p]- und MA[q]-Prozessen verwendet, kann man auch die ARMA[p,q] Prozesse in verkürzter Form durch das Wirken linearer Filter schreiben als

$$\alpha(p, B) \cdot x(t) \quad = \quad \beta(q, B) \cdot \epsilon(t). \tag{3.21}$$

Hieraus erkennt man, daß bei invertierbaren Filtern, d.h. wenn die jeweiligen Nullstellen des Filters außerhalb des Einheitskreises liegen, sich ein stationärer

neu anregt (Priestley 1996).

[12]Im dargestellten einfachen Modell kann man $x(t)$ als Lagerbestand, $\epsilon(t)$ als Teil der Produktionsrate und $\epsilon'(t)$ als Absatzrate deuten.

ARMA[p,q] Prozeß als MA[∞] bzw. als AR[∞] Prozeß schreiben läßt (Priestley 1996).

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha^{-1}(p,B)\cdot\beta(q,B)\cdot\epsilon(t) \\ \alpha(p,B)\cdot\beta^{-1}(q,B)\cdot x(t) &= \epsilon(t) \end{aligned}$$

Als eine weitere Verallgemeinerung der ARMA[p,q] Prozesse ergeben sich die *Autoregressive-Integrierte-Moving-Average Prozesse* ARIMA[p,q,d], die man dann zur Beschreibung von Zeitreihen verwendet, wenn diese einen Trend enthalten.

$$\alpha(p,B)\cdot(1-B)^d\cdot x(t) = \beta(q,B)\cdot\epsilon(t) \tag{3.22}$$

Der Operator $(1-B)$ wirkt als Differenzier-Operator, der durch Differenzenbildung $x(t)-x(t-1)$ einen Trend entfernt und die Zeitreihe formell auf einen ARMA[p,q] Prozeß führt (Schlittgen & Streitberg 1994). Ein spezieller ARIMA[0,0,1] Prozeß ist hierbei der schon eingeführte *random walk* Prozeß, der auch als *Wiener Prozeß* bekannt ist. Beim *random walk* ist $x(t)-x(t-1)=\epsilon(t)$, d.h. die Inkremente sind stationär, nicht aber der Prozeß selbst[13].

3.2 Dekompositionstheorem nach Wold

Betrachtet man das Periodogramm der Zeitreihe der Sonnenfleckenrelativzahlen (Abb. 2.1, Abb. 2.3), so fällt auf, daß neben der 11 Jahre währenden Periodizität, die durch das Maximum im Periodogramm angezeigt wird, auch ein frequenzabhängiges Kontinuum präsent ist. Diese Verteilung deutet darauf hin, daß in der betrachteten Zeitreihe neben dem periodischen noch ein weiterer Prozeßanteil existiert, der, kontinuierlich über den gesamten Spektralbereich verteilt, dafür sorgt, daß längere Zeitskalen stärker als kurze Zeitskalen zur Variabilität der betrachteten Zeitreihe beitragen.

In dieser Beobachtung manifestiert sich die grundlegende Eigenschaft stationärer Prozesse, die besagt, daß jeder stationäre Prozeß $x(t)$ als Summe

$$x(t) = y(t) + z(t) \tag{3.23}$$

zweier stationärer Prozesse $y(t)$ und $z(t)$ dargestellt werden kann, für die folgende Eigenschaften gelten:

[13]Die Varianz des *random walk* ist $\mathrm{var}(x(t))=\mathrm{var}(\sum_{i=1}^{t}\epsilon(t))=\sum_{i=1}^{t}\mathrm{var}(\epsilon(t))=t\cdot\sigma_\epsilon^2$, d.h. sie divergiert mit der Zeit. Für den Fall, daß der Mittelwert μ des treibenden Weißen Rauschens nicht Null ist, besitzt der *random walk* analogerweise einen linearen Trend $t\cdot\mu$.

1. Der Prozessanteil $y(t)$ ist singulär, d.h. zu jedem Zeitpunkt determiniert.
2. Der Summand $z(t)$ beschreibt einen nicht-determinierten Prozess, der zu keinem zukünftigen Zeitpunkt exakt vorhersagbar ist.
3. Die Anteile $z(t)$ und $x(t)$ sind unkorreliert, d.h. es gilt $cov(x(t)\, z(t)) = 0$.

Dieser Zerlegungssatz, den man auch als *Dekompositionstheorem* bezeichnet, wurde 1938 von Wold formuliert[14]. Er findet Anwendung bei der Beschreibung beobachteter Zeitreihen als Realisierungen stochastischer Prozesse und bei der Prognose zukünftiger Werte der Zeitreihe (Schlittgen & Streitberg 1994; Priestley 1996). Nach der Aussage des Dekompositionstheorems zerfällt jede stationäre Zeitreihe in eine perfekt prognostizierbare und in eine nicht exakt vorhersagbare Komponente. Von Interesse ist dabei letztere, da es möglich ist, aus der Kenntnis der Systemparameter des nicht-deterministischen Prozessanteils, zukünftige Werte einer Zeitreihe zu schätzen[15]. Die Untersuchung von Prognosen und deren zugehörige Vorhersagefehler bilden einen wichtigen Teilbereich moderner Zeitreihenanalytik (Fuller 1996). Bei der Prognose werden die Systemparameter des stationären Prozesses als bekannt vorausgesetzt. Im Regelfall müssen diese Werte jedoch zuerst durch die Anpassung eines geeigneten Modells an die gemessene Zeitreihe ermittelt werden. In Kapitel 4.2.2 wird die Parameterschätzung und Modellanpassung diskutiert.

3.3 Prädiktion von Zeitreihen

Ein oft diskutiertes Problem bei der Analyse empirischer Zeitreihen ist die Vorhersage eines zukünftigen Wertes auf der Basis der bisher gemessenen Werte $x(t-i), i = 0, 1, \ldots, N-1$ der Zeitreihe. Der zuletzt gemessene Wert ist $x(t)$ und das Ziel der Prognose sei der Wert der Zeitreihe zum Zeitpunkt $t+h, h > 0$. Beschreibt man den zu schätzenden Wert mit $\hat{x}(t+h)$, so läßt sich dieser als Funktion der bekannten Werte schreiben (Priestley 1996).

$$\hat{x}(t+h) \quad = \quad \Theta(x(t), x(t-1), x(t-2), \ldots, x(t-N+1)) \qquad (3.24)$$

Als Qualitätskriterium der getroffenen Vorhersage verwendet man den mittleren quadratischen Fehler $< (\hat{x}(t+h) - x(t+h))^2 >$, der bei optimaler Prognose minimal wird. Dem entspricht die Berechnung des *bedingten Erwartungswertes*

[14]Am oben genannten Beispiel der Sonnenfleckenrelativzahlen kann man den regelmäßigen 11-jährigen Zyklus mit der singulären Komponente verbinden und die unregelmäßigen Variationen der Maxima mit dem nicht-deterministischen Anteil der beobachteten Zeitreihe.

[15]Die Prognose von zukünftigen Werten einer singulären Zeitreihe ist trivial. Beispielsweise gilt bei einer streng periodischen Komponente eines stationären Prozesses für deren Anteil immer $x(t) = x(t + k \cdot P)$ $(k = 0, 1, \ldots,$ Periode P).

$$\hat{x}(t+h) \;=\; E\left[x(t+h)|x(t), x(t-1), x(t-2), \ldots, x(t-N+1)\right]. \quad (3.25)$$

Die gemessene Zeitreihe $x(t)$ schränkt den Hilbertraum $\mathcal{H}$ aller möglichen Realisierungen des Prozesses auf diejenigen Reihen ein, deren Werte im *sichtbaren* Zeitfenster mit $x(t)$ übereinstimmen. Vor bzw. nach dem Zeitfenster divergieren die Realisierungen aus $\mathcal{H}$, da hier keine beschränkende Information vorliegt. Der bedingte Erwartungswert stellt somit eine Mittelung der Werte für $x(t+h)$ aller Realisierungen aus $\mathcal{H}$ dar (Priestley 1996).

Diese theoretischen Betrachtungen erlangen eine praktische Anwendbarkeit, wenn man den Erwartungswert aus Gl. 3.25 berechnen kann, d.h. wenn die dem Prozeß zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsfunktion bekannt ist. Da dies jedoch in den seltensten Fällen zutrifft, behilft man sich durch den Ansatz eines *linearen Schätzers* für $\hat{x}(t+h)$[16].

$$\hat{x}(t+h) \;=\; b_0\, x(t) + b_1\, x(t-1) + \ldots + b_{N-1}\, x(t-N+1) \qquad (3.26)$$

Die Koeffizienten werden bei der besten Prognose dadurch bestimmt, daß sie den Vorhersagefehler minimieren. Da dieser Ausdruck eine quadratische Funktion von $x(t)$ ist, ergeben sich die Werte der Koeffizienten allein aus der Kenntnis der Autokorrelationsfunktion des Prozesses (Priestley 1996). Diese Schätzung $\hat{x}(t+h)$ läßt sich geometrisch als Orthogonalprojektion des unbekannten Wertes $x(t+h)$ auf den Raum der bekannten Werte beschreiben (s. Abb. 3.7). Dabei bildet der Raum der Beobachtungen bis einschließlich $x(t)$ einen Unterraum $\mathcal{H}_o$ des allgemeinen Hilbertraumes $\mathcal{H}$. Die nötige Projektion wird stark vereinfacht, wenn für $\mathcal{H}$ eine Orthonormalbasis bekannt ist. Im Falle eines AR[p] Prozesses ist eine solche Orthonormalbasis in den unkorrelierten Beiträgen des Rauschens $\epsilon(t)$ mit $<\epsilon(t)\cdot\epsilon(t')>=\delta_{t,t'}$ gegeben. Für die 1-Schritt Prognose ist der Schätzwert $\hat{x}(t+1)$ sowohl als Linearkombination der bisherigen Beobachtungen aus $\mathcal{H}_o$ wie auch als Projektion des gesuchten Wertes $x(t+1)$ aus $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{H}_o$ darstellbar.

$$\begin{aligned} \hat{x}(t+1) &= a_1\, x(t) + a_2\, x(t-1) + \ldots + a_p\, x(t-p+1) \qquad (3.27) \\ &= x(t+1) - \epsilon(t+1) \end{aligned}$$

Man erkennt, daß $\epsilon(t+1)$ der essentiell neue, *innovative* Anteil an $x(t+1)$ ist, der nicht linear abhängig zu den bisherigen Beobachtungen ist (Priestley 1996). Der Vorhersagefehler dieser 1-Schritt-Prognose ist

[16]Der lineare Ansatz für den Schätzer ist dann nur exakt, wenn die Wahrscheinlichkeitsfunktion des Prozesses einer Normalverteilung entspricht (Brockwell & Davis 1991).

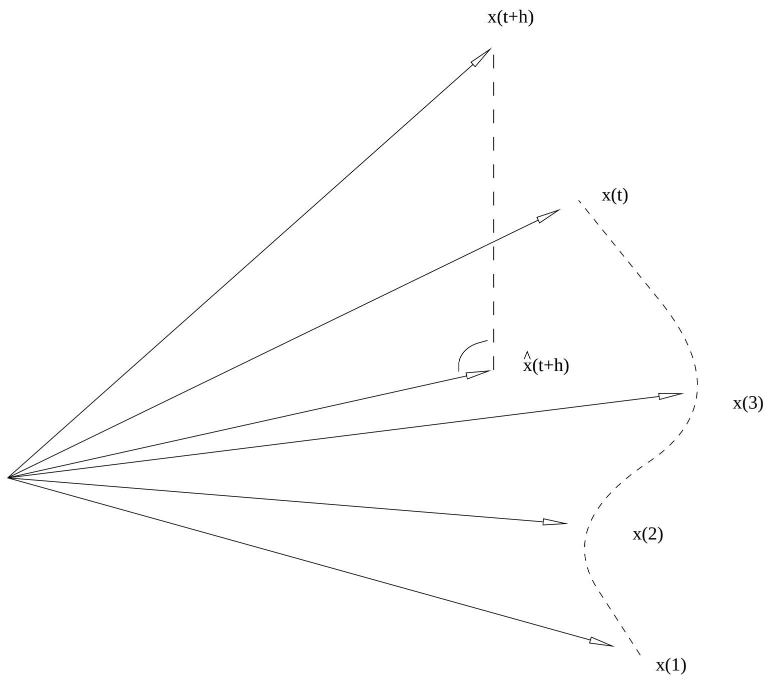


Abbildung 3.7: Der Schätzwert $\hat{x}(t+h)$ entspricht der Projektion des zu schätzenden Wertes $x(t+h)$ auf den Hilbertraum $\mathcal{H}_o$ der bekannten Beobachtungen (Priestley 1996).

$$< (\hat{x}(t+1) - x(t+1))^2 >_1 = < \epsilon^2(t+1) > = \sigma_\epsilon^2 \quad . \tag{3.28}$$

Ausgehend von dieser Vorhersage kann man auch auf weiterreichende Prognosen durch Rekursion schließen. Der Fehler der 2-Schritt-Vorhersage hängt demzufolge nur von $\epsilon(t+1)$ und $\epsilon(t+2)$ ab.

$$\begin{aligned} \hat{x}(t+2) &= a_1\,\hat{x}(t+1) + a_2\,x(t) + \ldots + a_p\,x(t-p+2) \\ &= x(t+2) - \epsilon(t+2) - a_1\,\epsilon(t+1) \end{aligned} \tag{3.29}$$

Der Vorhersagefehler der 2-Schritt-Prognose ist

$$< (\hat{x}(t+2) - x(t+2))^2 >_2 = \sigma_\epsilon^2(1 + a_1^2) \quad . \tag{3.30}$$

Im weiteren Fortschreiten der Prognoselänge werden die unbeobachteten Variablen sukzessive durch ihre optimalen Prognosen ersetzt. Die aktuellen Störungen $\epsilon(t+1)$, $\epsilon(t+2)\ldots$ entsprechen dabei den Prognosefehlern der 1-Schritt-Prognosen, die immer senkrecht auf den Unterraum $\mathcal{H}_o$ stehen. Der allgemeine

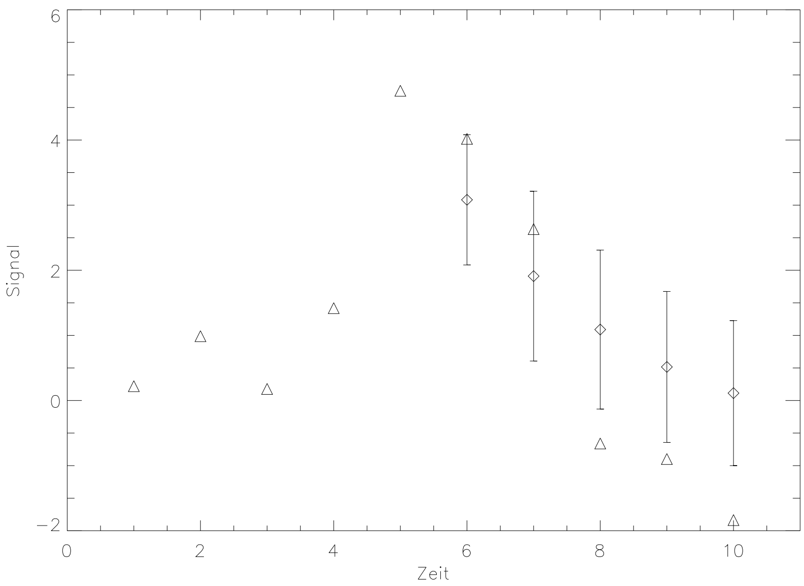


Abbildung 3.8: AR[1] Prozeß (a=0.7, Dreiecke) mit Prognosen (Rauten) und zugehörigen 1-σ Fehlern. Dabei ist die erste Hälfte des AR Prozesses die für die Schätzung als bekannt vorausgesetzte Beobachtung.

Prognosefehler eines AR[p] Prozesses besitzt die Varianz $\sigma_\epsilon^2(1 + \sum_{i=1}^{p-1} a_i^2)$. Abbildung 3.8 zeigt am Beispiel der Prognose eines AR[1] Prozesses, wie die Vorhersage die grobe zeitliche Struktur, hier den Abfall der Zeitreihe, gut erfasst.

Abschließend ist es wichtig anzumerken, daß es sich bei den verschiedenen Prognoseverfahren, die heute Verwendung finden, lediglich um verschiedene Rechenprozeduren handelt, die alle die gleiche Größe, den Kleinste-Quadrate-Schätzer eines zukünftigen Wertes, aus der Kenntnis der bisher gemessenen Zeitreihe bestimmen (Priestley 1996). Detaillierte Beschreibungen der Prädiktionstheorie, insbesondere die Anwendung verschiedener linearer Schätzer, finden sich bei Brockwell & Davis (1991), Priestley (1996) und Hamilton (1994).

3.4 Modellidentifikation

Die Prädiktion von Zeitreihen setzt die Kenntnis der Systemparameter voraus. Sind diese, was in der Regel der Fall sein wird, nicht bekannt, steht am Anfang der Zeitreihenanalyse die Modellanpassung und die Schätzung der Modellparameter.

Die Identifikation eines Modells, das die Dynamik der gemessenen Zeitreihe $x(t)$ vollständig erfasst, stellt dabei den entscheidenden Analyseschritt dar. Hier ist die Erfahrung des Experimentators gefragt, da es *kein Kochrezept* gibt, das automatisch immer zur richtigen Modellbeschreibung führt. Die unten aufgeführten 3 Schritte zur Modellidentifikation haben sich (nicht nur bei der Analyse astronomischer Zeitreihen) bewährt und stellen eine sinnvolle und robuste Vorgehensweise dar empirische Zeitreihen[17] zu behandeln.

1. Die Daten der Zeitreihe werden graphisch dargestellt. Dadurch gewinnt man einen Eindruck, ob die Zeitreihe einen Trend oder eine periodische Komponente enthält, wie groß das Rauschniveau der Daten im Vergleich zur intrinsischen Variabilität ist, ob Ausreißer auftreten oder ob die Zeitreihe mit dem Kriterien der Stationarität vereinbar ist.

2. Als nächsten Schritt berechnet man Autokorrelationsfunktion und Periodogramm der Zeitreihe. Zerfällt die Korrelation aufeinanderfolgender Werte, so spricht dies für eine in den Daten enthaltenen stochastische Komponente, die sich allgemein mit einem AR Prozeß beschreiben läßt (s. Gl. 3.23). Ein weiterer Hinweis auf einen stochastischen Anteil zeigt ein frequenzabhängiges Kontinuum der Signalstärke im Periodogramm der Zeitreihe.

3. Man zerlegt die Zeitreihe in die vorgefundenen Komponenten, sodaß singuläre und irreguläre Anteile voneinander getrennt untersucht werden können. Mit Algorithmen zur Periodensuche bzw. zur Modellierung stochastischer Prozesse werden schließlich die Parameter der Komponenten bestimmt.

Mitunter kann man die Parameter des gesuchten Prozesses schon aus dem Verhalten der ACF abschätzen. Ein exponentiell gedämpfter Zerfall der Korrelation bzw. eine gedämpfter Oszillator weisen auf einen wirksamen AR Prozeß hin. Bricht die Korrelation dagegen abrupt nach q Schritten ab, so kann dies ein Hinweis auf einen MA[q] Prozeß sein. In diesem Zusammenhang ist wichtig, die Fehlergrenzen der Kenngrößen zur Qualifizierung einer gefundenen Korrelation zu verwenden (s. Kap. 4.2.1). Eine genaue Bestimmung der Ordnung einer angewandten Modellbeschreibung ist Teil der Parameteridentifikation und geschieht durch die Untersuchung der Zeitreihe der Residuen einer Modellschätzung. Diese Residuen, d.h. die Differenz zwischen gemessenen Werten und geschätzten Werten der Zeitreihe, sind dann unkorreliert, wenn die Prozessdynamik die gesamte Dynamik der Zeitreihe erfasst. Man verwendet diese Eigenschaft zur Qualifikation von Modellschätzungen (s. Kap. 4.2.2).

3.5 Schätzung der Parameter stochastischer Prozesse

Im folgenden, soll das Prinzip der Parameterschätzung eines stochastischen Prozeß am Beispiel einer AR[p] Modellschätzung demonstriert werden. Will man

[17] Vielversprechend kann es auch sein, nicht nur die Zeitreihe $x(t)$, sondern auch die zugehörige Differenzenfolge $B \cdot x(t)$ zu behandeln (ARIMA Prozesse).

einen ARMA Prozeß schätzen, so muß man AR und MA Verfahren kombinieren (Schlittgen & Streitberg 1994). Die vorliegende Zeitreihe $x(t)$ wird als Realisierung eines AR[p] Prozesses interpretiert, d.h. die Modellordnung wird als bekannt vorausgesetzt. Die Beschreibung des AR[p] Prozesses kann, wie in Kap. 3.3 gezeigt wurde, auch als lineare Regression des Wertes $x(t)$ aus den zurückliegenden Werten der Zeitreihe interpretiert werden. Die Parameterschätzung entpricht daher im Prinzip der Bestimmung der Regressionskoeffizienten, wobei $\epsilon(t)$ als Residuum der Linearkombination fungiert. Der Unterschied zur Regression liegt darin, daß die Zufallsvariablen $x(t)$ korreliert, d.h. voneinander ahängig sind. Ein Ansatz zur Parameterbestimmung, der auf der Methode eines Kleinste–Quadrate–Schätzers aufbaut, ist dennoch gerechtfertigt, da alle Werte der Zeitreihe $x(t)$ bekannt sind und die Minimierung nicht beeinflußt wird (Priestley 1996). Im Falle eines AR[p] Modelles lassen sich N-p Regressionsterme formulieren, deren Summe $\Theta(a_1, \ldots, a_p)$ minimiert werden muß.

$$\begin{aligned} \Theta(a_1, \ldots, a_p) &= \sum_{t=p+1}^{N} \epsilon^2(t) \\ &= \sum_{t=p+1}^{N} (x(t) - a_1\, x(t-1) - \ldots - a_p\, x(t-p))^2 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Hierbei ist wichtig anzumerken, daß die Werte für $\epsilon(1) \ldots \epsilon(k)$ nicht berechnet werden können, weil keine p Zeitschritte zurückliegende Beobachtungen existieren. Dieses verspätete Einsetzen der Korrelation ist unvermeidbar und man kann bei genügend großer Reihendimension[18] N die obigen, unvollständigen Summen durch die vollständige Summation der Quadrate ersetzen.

Durch die unvollständige Summation treten in der quadratischen Form auch nur *fast* alle Terme der Kovarianzfunktion $R(\Delta)$ auf. Führt man eine Funktion $R'(\Delta)$ ein, deren Beschreibung

$$R'(t_1 - t_2) = \frac{1}{N} \sum_{t=p+1}^{N} x(t-t_1) \cdot x(t-t_2) \tag{3.32}$$

formell die exakte Autokovarianz für $N \to \infty$ liefert, kann man die Minimierung der Funktion Θ ausdrücken durch

$$\mathsf{R'}_p \cdot \vec{\alpha} = \vec{R}_{\text{init}} \tag{3.33}$$

[18] Diese Näherung hängt nicht von der Modellordnung, sondern von der Korrelationslänge des AR[p] Prozesses ab. Dies ist auch bei der Simulation von Prozessen wichtig, da man erst nach einer *Einschwingzeit* von einem stochastischen Prozeß sprechen kann.

$$\begin{aligned}
\text{mit} \quad \vec{\alpha} &= (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_p)\,, \\
\vec{R}_{\text{init}} &= (R'(1), R'(2), \ldots, R'(p))\,, \qquad (3.34) \\
\text{und} \quad \mathsf{R}'_p &= \begin{pmatrix} R'(0) & R'(1) & \ldots & R'(p-1) \\ R'(1) & R'(0) & \ldots & R'(p-2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R'(p-1) & R'(p-2) & \ldots & R'(0) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Das erhaltene Gleichungssystem ist formell mit den schon bekannten *Yule-Walker* Gleichungen 3.16 identisch, weshalb man die Schätzwerte $\hat{a}_i, i = 1, \ldots, p$ auch als *Yule-Walker* Schätzer des zugrunde liegenden AR[p] Prozesses bezeichnet. Die auf diese Art gewonnenen Koeffizienten des Autoregressiven Prozesses stellen eine erste Näherung der zu bestimmenden Modellparameter dar. Eine genauere Bestimmung basiert auf der Kleinste-Quadrate Schätzung aus Gl. 3.26, wobei die *Yule-Walker* Schätzer als Startwerte verwendet werden. In diesem Zusammenhang wird oft der sog. *Levinson-Durbin* Algorithmus verwendet, der das Prinzip der rekursiven Prädiktion benutzt, um die dynamischen Parameter zu bestimmen (Schlittgen & Streitberg 1994, Fuller 1996). Im asymptotischen Grenzfall $N \to \infty$ konvergieren die *Yule-Walker* Schätzer gegen die wahren Parameter. Die Differenz der Schätzwerte $(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_p)$ zu den wahren Parametern $(a_1, \ldots, a_p)$ ist asymptotisch multivariat normalverteilt mit dem Erwartungswert 0 und der Kovarianzmatrix $\sigma_\epsilon^2 \cdot \mathsf{K}_p$. Die Kovarianzmatrix $\mathsf{K}_{(i,j)} = R(i-j)$, die die Korrelationen von p aufeinanderfolgenden Werten der Zeitreihe beschreibt, kann als Indikator einer gelungenen Parameterbestimmung dienen: Normiert man auf die Prozessvarianz $(R(0) = \sigma^2)$ so beschreibt die Funktion

$$Q(p) \;=\; 1 - a_1 \cdot \rho(1) - a_2 \cdot \rho(2) - \ldots - a_p \cdot \rho(p) \qquad (3.35)$$

die Qualität der Modellanpassung. Je kleiner $Q(p)$ wird, desto besser gelingt die Annäherung an den Grenzfall. In der Praxis ist in diesem Zusammenhang die Frage nach den Konfidenzintervallen der Parameterschätzung von Interesse. Um die Approximationsgüte der *Levinson-Durbin* Schätzungen zu quantifizieren, wurden 10 000 AR[1] Zeitreihen simuliert und die resultierenden Verteilungen der Schätzwerte analysiert.

Die erhaltenen Verteilungen (Abb. 3.9, Abb. 3.10) zeigen mit zunehmender Korrelation, d.h. mit wachsendem dynamischen Parameter a_1, eine Abnahme der Breite der Verteilung, die mit einer gleichzeitigen Zunahme der Verteilungsschiefe verbunden ist (s. Abb. 3.10). Der höchste Punkt der Verteilungen gibt zwar in der Regel den wahren Wert des Parameters gut wieder, ist jedoch mit dem Mittelwert der Verteilung bei stark korrelierten AR Prozessen nicht identisch. Die Kovarianzmatrix K_p ist im Fall eines AR[1] Prozesses durch $(1 - a_1^2)/N$ gegeben, ist dann also von kleinem Betrag, wenn die Wurzeln des stochastischen Prozesses

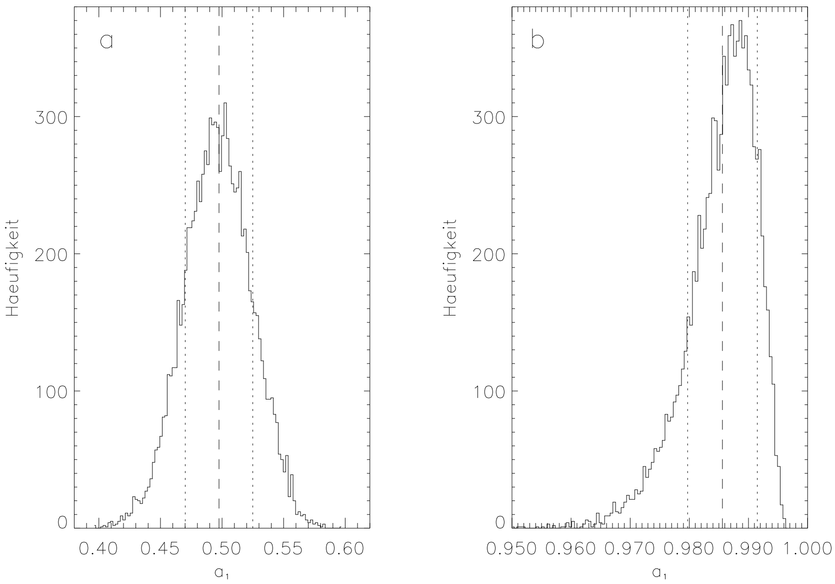


Abbildung 3.9: Verteilungen des geschätzten AR[1] Parameters bei a) a_1=0.5 ($\mu = 0.4975, \sigma = 0.0274$) und b) $a_1 = 0.99$ ($\mu = 0.9856, \sigma = 0.0059$). Den Verteilungen liegen jeweils 10 000 simulierte AR[1]-Zeitreihen mit $\epsilon(t) \sim \mathcal{N}(0,1)$ zugrunde. Die Dimension der simulierten Zeitreihen betrug 1000, dies entspricht $693 \cdot \tau$ im Fall a) bzw. $10 \cdot \tau$ im Fall b).

nahe am Einheitskreis liegen. Da in diesem Fall die Verteilungsschiefe maximal wird, sind sehr lange Reihen notwendig, um die Dynamik der Zeitreihe, hier also die Länge des Relaxators, sicher bestimmen zu können.

Es muß betont werden, daß die Parameterverteilung nur eine asymptotische Aussagekraft besitzt. Da man aber in der Praxis nicht beliebig lange Meßreihen zu Verfügung hat, ist es angebracht, aus dem Verhalten der Verteilungskenngrößen eine Faustregel abzuleiten, die einen sicheren Umgang mit den ermittelten Größen erlaubt. Aus den Verteilungen der statistischen Kenngrößen der durchgeführten Simulationen (s. Abb. 3.10) kann man ableiten, daß für τ>10 − 20% T_{Ges} die Abweichungen vom Gauss'schen Grenzfall das 1σ-Niveau überschreiten. Eine exakte analytische Formulierung der Fehlergrenzen bei AR(1) Parameterschätzungen ist nicht möglich (Hamilton & Wu 1995), jedoch kann die Form der Wahrscheinlichkeitsverteilung der AR(1) Parameter abgeschätzt werden. Der die Verteilungsbreite bestimmende Maximum–Likelihood-Ausdruck (für ein Signifikanzniveau CL) liefert für die asymptotische Verteilung des Parameters a_1 den Ausdruck

$$\hat{a}_1 \quad \pm \quad \sqrt{\frac{\chi_2^2(1-\mathrm{CL})}{\frac{N-1}{N}\frac{N-(N-2)\hat{a}_1}{(1-\hat{a}_1^2)^2}}} \quad , \tag{3.36}$$

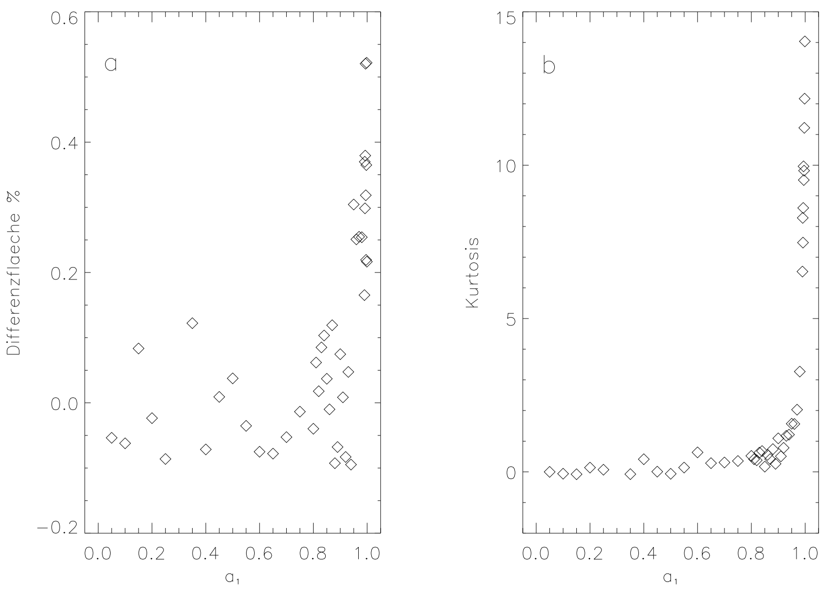


Abbildung 3.10: Kenngrößen der simulierten Verteilungen (vgl. Abb.3.9). a) Schiefe der Verteilung, angegeben als FLächendifferenz von $A_{-\infty,\mu}$ und $A_{\mu,\infty}$ ($A_{-\infty,\mu} = \int_{-\infty}^{\mu} P(\omega)d\omega$, $A_{\mu,\infty}$ analog). b) Kurtosis der Verteilungen als Maß für die Abnahme der Verteilungsbreite, angegeben in Einheiten der theoretischen 1σ Breite einer Gaussverteilung.

der für die Annäherung $|a_1| \to 1$ gegen eine unendlich schmale Verteilung konvergiert (s. Abb. 3.10b und Abb. 3.11).

Hierbei fällt auf, daß alle empirisch ermittelten Verteilungsbreiten systematisch über den theoretischen Werten liegen. Beide Verteilunsgbreiten werden mit zunehmenden Parameter a_1 zwar kleiner, und es kommt zu einer augenscheinlichen Annäherung der Werte, jedoch divergiert das Verhältnis der Verteilungsbreiten im asymptotischen Grenzfall gegen ∞ (s. Abb. 3.11b). Betrachtet man im folgenden die Werte für a_1, bei denen bestimmte statistische Kenngrößen kritisch werden, so muß betont werden, daß die hier präsentierten Simulationsergebnisse sich auf Zeitreihen mit einer Länge von $N = 1000$ Werten beziehen. Entscheidend für die Abweichung vom Gauss'schen Grenzfall ist nicht der Absolutwert der Relaxationszeit, sondern der Quotient aus der Gesamtlänge und der, die Dynamik des AR[1] Prozesses bestimmenden Relaxatorlänge τ ($a_1 = 0.5, 0.9, 0.99$ entsprechen die Relaxationszeiten $1.4, 9.5, 99.5$)[19]. Bis etwa zu einem Wert von $a_1 < 0.99$, d.h für $\tau < 10\%\, T_{\text{Ges}}$, liefern die Simulationen Verteilungsbreiten, die 10–20% größer sind als der theoretische Wert. Diese Ungleichheit läßt sich dadurch erklären, daß im letztgenannten Fall immer auch Simulationen zur Gesamtheit beitragen, deren

[19]Dieses Verhältnis von T_{Ges}/τ wird im folgenden als *coverage* des jeweiligen angepaßten AR-Modelles an die zu untersuchenden Zeitreihe bezeichnet.

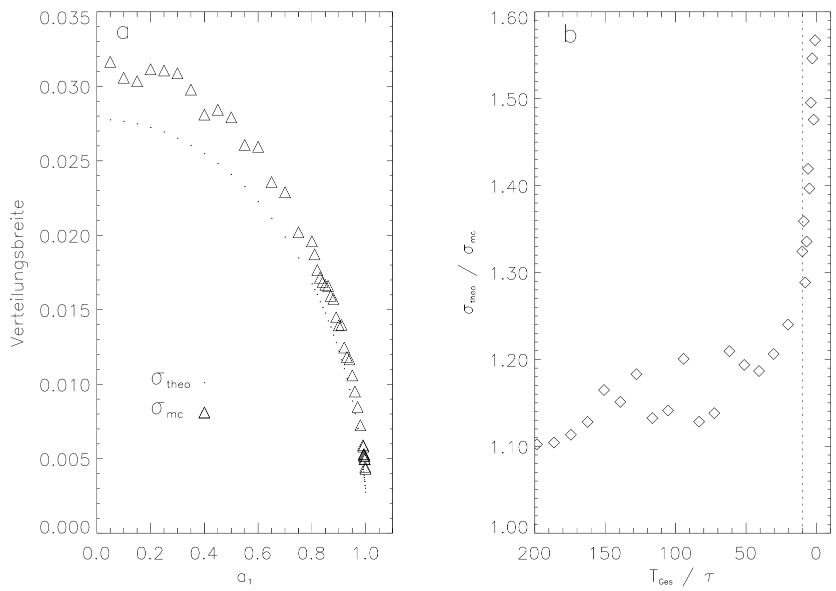


Abbildung 3.11: Vergleich von empirischer und theoretischer Verteilungsbreite bei der Schaetzung von AR[1] Prozessen. a) Für einen dynamischen Parameter a_1 wurden 1000 Zeitreihen (Länge 1000, $\epsilon(t) \in \mathcal{N}(0,1)$) simuliert, und die Varianz der sich ergebenden Verteilung des geschätzten Parameters σ^2_{mc} bestimmt. Das Diagramm enthält zum Vergleich die Verteilungsbreite σ_{theo} der theoretisch abgeleiteten Maximum-Likelihood Verteilung. b) Hier ist das Verhältnis von theoretischen zur empirischen Verteilungsbreiten aufgetragen. Die Abszisse gibt das Verhältnis von Gesamtbeobachtungszeit T_{Ges} zur Relaxationszeit $\tau = -1/\log(\mathrm{a}_1)$ an.

Parameterschätzungen von a_1 dicht am Einheitskreis liegen. Die Einflußnahme solcher Ausreißer auf die Verteilungsbreite σ_{mc} wächst für $a_1 > 0.99$ stark an und bewirkt ein Divergieren der empirischen Verteilungsbreite (s. Abb. 3.11b).

Kapitel 4

Lineare Zustandsraummodelle

4.1 Das Lineare Zustandsraummodell

4.1.1 Definition

Die im vorherigen Kapitel eingeführte Methode der Modellierung gemessener Zeitreihen mit Hilfe stochastischer Prozessbeschreibungen wird in der Praxis der empirischen Zeitreihenanalyse schon seit Jahrzehnten angewandt (Schlittgen & Streitberg 1994, Chatfield 1989). Da jede physikalische Messung aber mit einem unvermeidbaren Meßfehler behaftet ist, liefert die Beobachtung eines Prozesses den Wert der gesuchten Zeitreihe $x(t)$ nur mittelbar. Die gemessene Zeitreihe $y(t)$ ist eine vom Beobachtungsrauschen $\eta(t)$ überlagerte Version des interessierenden Prozesses. Diese Ambivalenz hinsichtlich der Systemvariablen $x(t)$ und der Beobachtungsvariablen $y(t)$ führt auf die Definition des *Linearen Zustandsraummodelles*. In der englischsprachigen Literatur bezeichnet man das Modell als *Linear State Space Model*, wovon sich auch die in dieser Arbeit verwendete Abkürzung *LSSM* ableitet. Die LSSM Beschreibung beruht auf der sog. *Markov-Eigenschaft* stationärer Zeitreihen (Schlittgen & Streitberg 1994), die besagt, daß die gesamte, für eine Prognose relevante Information in dem gegenwärtigen Zustand enthalten ist, unabhängig davon, wie dieser erreicht wurde[1].

Die zeitliche Dynamik der unbeobachtbaren Zustandes $x(t)$ ist gegeben durch die *Systemgleichung*

$$\vec{x}(t) = \mathsf{A}\,\vec{x}(t-1) + \vec{\epsilon}(t) \qquad \vec{\epsilon}(t) \sim \mathcal{N}(0, Q) \tag{4.1}$$

[1]Die Markov-Eigenschaft zeigt sich in der Systemgleichung, deren allgemeinste Formulierung eine zeitabhängige Varianz $Q(t)$ enthält. Nimmt man die Störvarianz als konstant an, beschreibt die Systemvariable $x(t)$ einen AR Prozeß.

und der mit dem Meßfehler behaftete Zustand $y(t)$ folgt aus der *Beobachtungsgleichung*

$$\vec{y}(t) \;=\; \mathsf{C}\,\vec{x}(t) + \eta(t) \qquad \eta(t) \sim \mathcal{N}(0, R)\ . \tag{4.2}$$

Im Gegensatz zu der in Kapitel 3.1 bei der Einführung stochastischer Prozesse benutzten Summenschreibweise, verwendet man beim Zustandsraummodell aus Gründen der Übersichtlichkeit eine *multivariate* Formulierung[2]. Die Transformation auf die Summenschreibweise ergibt sich durch Ausmultiplizieren der auftretenden Matrizen. Die Vektoren $\vec{x}(t)$, $\vec{y}(t)$, $\vec{\epsilon}(t)$ und $\vec{\eta}(t)$ beschreiben alle Werte der jeweiligen Zeitreihe bis zum Zeitpunkt t. Im Falle eines AR[2] Prozesses besitzt die Systemgleichung des Zustandsraummodelles folgende Matrixformulierung:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t-1) \\ x_2(t-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon(t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta(t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

Die 2×2 Matrix A, die die Prozessdynamik zum Ausdruck bringt, bewirkt eine Koppelung der Komponenten des Vektors $\vec{x}(t)$.

$$x_1(t) \;=\; \alpha_1\, x_1(t-1) + x_2(t-1) + \epsilon(t) \tag{4.5}$$

$$x_2(t) \;=\; \alpha_2\, x_2(t-1) \tag{4.6}$$

Dabei beschreibt die erste Komponente $x_1(t)$ des Vektors $\vec{x}(t)$ den verborgenen stochastischen Prozeß. Löst man das Gleichungssytem auf, so folgt für die Systemvariable die bekannte Summenformel eines AR[2] Prozesses.

$$x_1(t) \;=\; \alpha_1\, x_1(t-1) + \alpha_2\, x_2(t-2) + \epsilon(t) \tag{4.7}$$

Im allgemeinen Fall eines AR[p] Prozesses enthält die $p \times p$ Matrix A die dynamischen Parameter α_i, $i = 1, \ldots, p$ in der ersten Spalte. Der Vektor $\vec{\epsilon}(t)$ des treibenden Systemrauschens, wie auch der des Beobachtungsrauschens $\vec{\eta}(t)$, enthält die normalverteilte Zufallsvariable $\epsilon(t)$ bzw. $\eta(t)$ als einzige von Null verschiedene Komponente. Der in der Praxis der empirischen Zeitreihenanalyse häufigste Fall einer eindimensionalen Meßreihe schränkt die Matrix C auf den Vektor $\vec{C} = (c, 0, \ldots, 0)$ ein.

[2]Modelliert man den allgemeineren Fall eines ARMA Prozesses mit Hilfe eines Zustandsraummodelles, so wird der zweite Term $\vec{\epsilon}(t)$ durch den Ausdruck $\mathsf{B}\,\vec{\epsilon}(t)$ ersetzt, wodurch auch zurückliegende Terme des Systemrauschens den aktuellen Zustand beeinflussen können.

Da in den Modellgleichungen eine Eichfreiheit bzgl. der Projektion der Systemvariablen auf den Raum der Beobachtungen besteht, lassen sich die Parameter A, $\vec{Q}$, C und R des Modelles nicht allein durch die Beobachtungsvariable $\vec{y}(t)$ eindeutig bestimmen (Gantert 1993). Eine Transformation der Systemvariablen $\vec{x}(t)$ mit Hilfe einer nicht-singulären Abbildung L kann durch eine entsprechende Transformation der Matrix C kompensiert werden, so daß die Beobachtungsvariable nicht beeinflusst wird[3]. Diese Eichfreiheit führt dazu, daß man das stationäre Zustandsraummodell in zwei kanonischen Standardformen angeben kann, die sich nur hinsichtlich des Rechenaufwandes bei der Parameterschätzung unterscheiden (Gantert 1993). In der Praxis hat es sich bewährt, die Varianz Q Systemrauschens $\vec{\epsilon}$ auf 1 zu normieren, sodaß man auf die Schätzung dieses Parameters verzichten kann (Honerkamp 1994).

4.1.2 Das Kalman Filter

Die Schätzung des unbeobachtbaren stochastischen Prozesses verlangt eine explizite Modellierung des Beobachtungsrauschens. Aufbauend auf den Bemerkungen zur Prädiktionstheorie kann man diese Schätzung $\hat{\vec{x}}(t)$ basierend auf den zuvor gemessenen Werten $\vec{x}(t')$, $t' < t$ rekursiv formulieren. Die hier gegebene kurze Beschreibung versucht das Prinzip der bedingten Erwartungswerte vorzustellen. Detaillierte Beschreibungen des Kalman Filters finden sich bei Brockwell & Davis (1991), Priestley (1996) und Honerkamp (1994).

Eine Schätzung für $\hat{\vec{x}}(t)$ ist z.B. durch die Linearkombination aller Werte $y(t'), t' = 1 \ldots t$ gegeben. Der Fehler dieser Schätzung $\hat{\vec{x}}(t) - \vec{x}(t)$ muß senkrecht auf den Raum der Beobachtungen stehen (s. Gl. 4.2), d.h. es muß gelten

$$< (\hat{\vec{x}}(t) - \vec{x}(t)) \cdot y(t') > \;=\; 0 \tag{4.8}$$

In der Anwendung des Kalman Filters zerfällt diese Schätzung in zwei Abschnitte: Zuerst werden alle früheren Schätzwerte des stochastischen Prozesses verwendet, um, basierend auf den Zeiten $1 \ldots t-1$, neue Werte der System- und Beobachtungsgleichung für den Zeitpunkt t zu ermitteln[4].

$$\vec{x}(t|t-1) \;=\; \mathsf{A}\,\vec{x}(t-1|t-1) \tag{4.9}$$
$$y(t) \;=\; \mathsf{C}\,\vec{x}(t|t-1) \tag{4.10}$$

[3]Mit den transformierten Systemzuständen $\vec{x}'(t) = \mathsf{L}^{-1}\,\vec{x}(t)$ ergeben sich die Modellparameter zu $\mathsf{A}' = \mathsf{L}^{-1}\,\mathsf{A}\,\mathsf{L}$, $\mathsf{Q}' = \mathsf{L}^{-1}\,\mathsf{Q}\,\mathsf{L}$ und $\mathsf{C}' = \mathsf{C}\,\mathsf{L}$ unter der Forderung $\vec{y}'(t) = \vec{y}(t)$.

[4]Die Beschränkung auf zurückliegende Messungen wird in der Notation $\vec{x}(t|t-1)$ ausgedrückt.

Als zweiter Schritt folgt nun eine Korrektur von $\vec{x}(t|t-1)$ durch die Hinzunahme der aktuellen Beobachtung $y(t)$. Diese vom Vorhersagefehler der Beobachtungen $y(t) - y(t|t-1)$ linear abhängige Größe liefert für den gesuchten Schätzwert

$$\vec{x}(t|t) \quad = \quad \vec{x}(t|t-1) + \vec{K}(t)(y(t) - y(t|t-1)) \quad . \tag{4.11}$$

Die analoge Rekursionsgleichungen für die Fehlerkovarianz $P(t|t) =< (\vec{x}(t) - \vec{x}(t|t))^2 >$ ergeben sich zu

$$\vec{P}(t|t-1) \quad = \quad \mathsf{A}\vec{P}(t-1|t-1)\mathsf{A}^T + \vec{Q} \tag{4.12}$$

$$\vec{P}(t|t) \quad = \quad \vec{P}(t|t-1) - \vec{K}(t)\mathsf{C}\vec{P}(t|t-1). \tag{4.13}$$

Die in obigen Gleichungen benutzte Matrix $\vec{K}(t)$ bezeichnet man als den *Kalman gain factor*

$$\vec{K}(t) \quad = \quad \frac{\vec{P}(t|t-1)\mathsf{C}^T}{\mathsf{C}\vec{P}(t|t-1)\mathsf{C}^T} + \vec{Q} \tag{4.14}$$

deren Wert sich aus der Minimierung der Gleichung 4.11 ergibt. Dies entspricht einer linearen Unabhängigkeit der Größe $\hat{\vec{x}}(t) - \vec{x}(t)$ mit dem durch $y(t')$ beschrieben Beobachtungsraum.

Die Verwendung des Kalman Filters hat zum Ziel, bei gegebenen Modellparametern $\mathsf{A}, \vec{Q}, \mathsf{C}$ und R des stochastischen Prozesses, die durch das Beobachtungsrauschen überdeckten Systemzustände $x(t)$ aus den Beobachtungen $y(t)$ zu schätzen. Das Kalman Filter ist in Bezug auf die Qualität dieser Schätzung der einfachen Ableitung

$$\vec{x}(t|t) = \mathsf{C}^{-1}\,\vec{y}(t) \tag{4.15}$$

überlegen, die sich unter der Annahme von $<\eta(t)>=0$ aus Gleichung (4.2) ergibt. Handelt es sich z.B. um einen AR[1] Prozess, der durch $x(t)$ beschrieben werden soll, so ergibt die einfache Ableitung der Systemvariablen eine Varianz des Vorhersagefehler von

$$< (x(t|t) - x(t))^2 >= \frac{R}{C^2} \quad , \tag{4.16}$$

im Vergleich zur Fehlervarianz $P(t|t)$ von

$$< (x(t|t) - x(t))^2 >= \frac{R}{C^2 + R \cdot P(t|t-1)^{-1}} \quad , \tag{4.17}$$

im Falle des Kalman Filteralgorithmus. Da $P(t|t-1)$ positiv definit ist, folgt mit $R \neq 0$, daß stets $P(t|t) < \frac{R}{C^2}$ gilt, d.h. daß das Kalman Filter verglichen mit der einfachen Ableitung den kleineren Vorhersagefehler, d.h. die bessere Schätzung der Systemvariablen $x(t)$, liefert[5].

Für $R \rightarrow 0$ wird die Beobachtung exakt, d.h. die Beobachtung $\vec{y}(t)$ entspricht der Systemvariablen $\vec{x}(t)$. In diesem Grenzfall[6] entspricht der *Kalman gain factor* $\mathsf{K}(\mathsf{t})$ gerade der Matrix C^{-1}.

4.2 Anwendung des Zustandsraummodelles

Die vorgestellte Methodik des Zustandsraummodelles findet in der Praxis immer dann Anwendung, wenn der stochastische Prozeß von einem Beobachtungsrauschen überdeckt wird. Die in Abb. 4.1 dargestellte Lichtkurve zeigt die für eine physikalische Messung[7] typische Eigenheit, daß die zeitlichen Modulationen der Meßgröße von einem Rauschen überlagert zu sein scheinen. Diese erste Beurteilung der Lichtkurve durch das bloße Auge entsteht durch den Eindruck, daß die sichtbaren Variationen zwar noch erkannt, ihre Ausprägung aber scheinbar durch einen zeitlich konstanten Rauschbeitrag verschleiert wird.

Ziel der Anwendung des Zustandsraummodelles ist es nun, die Dynamik des vermuteten AR[p] Prozesses zu schätzen[8]. Dies geschieht unter der Voraussetzung, daß die beitragenden Rauschkomponenten $\epsilon(t)$ und $\eta(t)$ voneinander unabhängige, normalverteilte Beiträge beschreiben.

4.2.1 Parameterschätzung im Zustandsraummodell

Die Schätzung der Kenngrößen des Zustandsraummodelles erfolgt durch die Anwendung des *Expectation-Maximization*-Algorithmus', kurz als EM-Algorithmus bezeichnet. Bei dieser Prozedur wird versucht, durch Iteration einer Schätzung der Zustandsvariablen, die Likelihood-Funktion $\mathcal{L}$, d.h. die Wahrscheinlichkeitsdichte

---

[5] Der Vorteil des Kalman Filters bzgl. der Varianz des Vorhersagefehlers wirkt sich um so stärker aus, je größer die Varianz R des Beobachtungsrauschens ist.

[6] Für $R \rightarrow 0$ gilt $\vec{x}(t|t) = \vec{x}(t|t-1) + \mathsf{C}^{-1}(\vec{y}(t) - \mathsf{C}\vec{x}(t|t-1)) = \mathsf{C}^{-1}\vec{y}(t)$.

[7] Bei der hier bespielhaft besprochenen Zeitreihe handelt es sich um den zeitlichen Verlauf der Röntgenhelligkeit der Aktiven Galaxie NGC 5506, aufgezeichnet mit dem Röntgensatellit EXOSAT. Die detaillierte Besprechung der LSSM Anwendung auf diese Art von Zeitreihen geschieht in Kap. 5.2.4. Hier steht der methodische Umgang mit dem LSSM Algorithmus im Vordergrund.

[8] Die historische Anwendung des Zustandsraummodelles entstand nicht aus einem Interesse an der versteckten Dynamik, sondern im Rahmen einer Vorhersage zukünftiger Werte unter der Annahme eines bekannten Prozesses. Diese Problematik tritt z.B. dann auf, wenn die Flugbahn eines Geschosses vorausberechnet werden soll. Dieser misanthropischen Anwendung verdankt das Zustandsraummodell seine Entstehung (Wiener 1930, Wiener 1949, Kalman 1960).

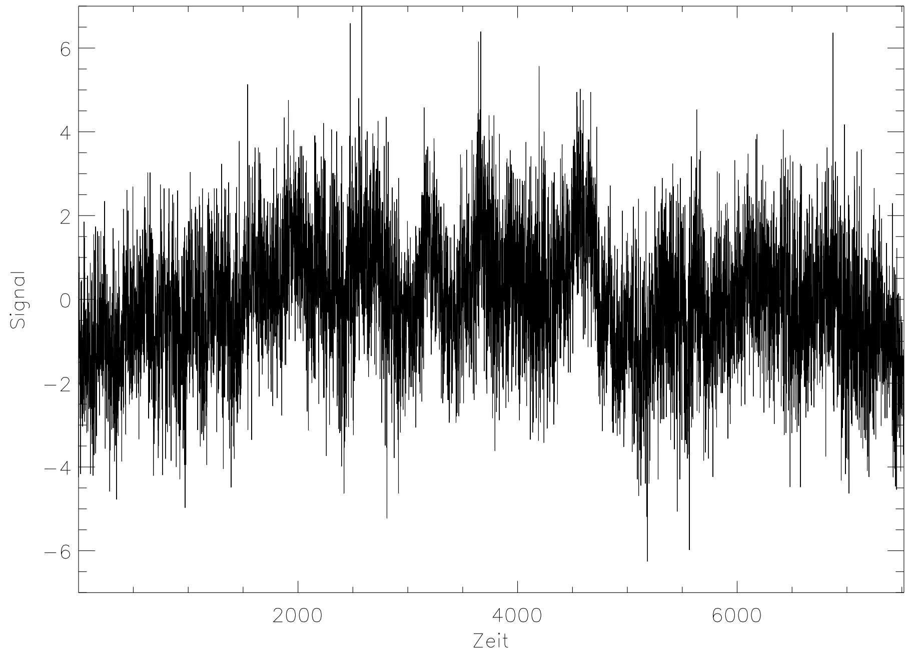


Abbildung 4.1: Mit Beobachtungsrauschen behaftete Zeitreihe einer physikalischen Messgröße. Das Signal beschreibt die EXOSAT ME Zählrate (subtrahierter Mittelwert) der Seyfertgalaxie NGC 5506 (s. Tab. 5.2, Dimension N=7519, Mittelwert μ=-0.028, Varianz σ^2=2.476).

der Verteilung der Messwerte $y(t)$, bei bekannten Systemparametern A, C, $\vec{Q}$ und R, zu maximieren. Im Fall einer eindimensionalen Beobachtung $y(t)$, $t = 1, \ldots N$ und angenommenen normalverteilten Zufallsvariablen ergibt sich eine multivariate Gaussfunktion

$$\max \quad \mathcal{L}(y(t), \mathsf{A}, \mathsf{C}, \vec{Q} = 1, R) =$$

$$\max \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \prod_{t=1}^{N} \frac{\exp(-\frac{1}{2}(\mathrm{y(t) - y(t|t-1)^T} \mathsf{D}^{-1}\mathrm{(t|t-1)(y(t) - y(t|t-1))}}{\sqrt{\det \mathsf{D}\mathrm{(t|t-1)}}} \tag{4.18}$$

$$\text{mit} \qquad \mathsf{D}(t|t-1) = < (y(t) - y(t|t-1)) \cdot (y(t) - y(t|t-1))^T >$$

Der hier verwendete Ausdruck D beschreibt die Fehler–Kovarianzmatrix der Kalman–Schätzungen der Beobachtungsgröße $y(t)$. Die Berechnung der Maximum–Likelihood–Schätzung erfolgt nun in zwei Schritten:

1. *Expectation* Im Erwartungsschritt werden durch Anwendung des Kalmanfilters die Systemvariablen und ihre Verteilungen geschätzt. Dem aktuellen

Satz von Systemparametern wird ein Likelihood–Wert $\mathcal{L}$ zugeordnet der mit der aktuellen Schätzung der unbeobachteten Zufallsvariablen $x(t)$ verbunden ist. Im Erwartungsschritt muß, daher auch der Name, der Erwartungswert der Likelihoodfunktion berechnet werden, wobei die Matrizen Q_i für $i = 2, \ldots, 5$ auftreten[9].

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Q}_2 &= \sum_{t=1}^{N} \vec{x}(t|N) \cdot y(t)^T && (4.19)\\
\mathsf{Q}_3 &= \sum_{t=1}^{N} < \vec{x}(t) \cdot \vec{x}(t)^T > && (4.20)\\
\mathsf{Q}_4 &= \sum_{t=1}^{N} < \vec{x}(t-1) \cdot \vec{x}(t)^T > && (4.21)\\
\mathsf{Q}_5 &= \sum_{t=1}^{N} < \vec{x}(t-1) \cdot \vec{x}(t-1)^T > && (4.22)
\end{aligned}
$$

2. *Maximization* Da die Likelihoodfunktion quadratisch in A und C ist, lassen sich die neuen Schätzwerte der Iteration exakt berechnen. Mit Hilfe der definierten Erwartungswerte ergibt der Maximierungsschritt die neuen Parameterwerte $\mathsf{A}_{\mathrm{neu}}$ und $\mathsf{C}_{\mathrm{neu}}$. Die Ableitung der Determinate der Matrix C liefert die Schätzungen des verbleibenden Parameters R_{neu} (die Varianz des Systemrauschens $\vec{Q}$ wurde auf 1 normiert).

$$
\begin{aligned}
\mathsf{A}_{\mathrm{neu}} &= \frac{{\mathsf{Q}_4}^T}{\mathsf{Q}_5} && (4.23)\\
\mathsf{C}_{\mathrm{neu}} &= \frac{{\mathsf{Q}_2}^T}{\mathsf{Q}_3} && (4.24)\\
R_{\mathrm{neu}} &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} (y(t) - \mathsf{C}_{\mathrm{neu}}\, \vec{x}(t|N))\, (y(t) - \mathsf{C}_{\mathrm{neu}}\, \vec{x}(t|N))^T \\
&\quad + \mathsf{C}_{\mathrm{neu}}\, \vec{P}(t|N)\, {\mathsf{C}_{\mathrm{neu}}}^T && (4.25)
\end{aligned}
$$

Die Annäherung an das (meist flache) Maximum von $\mathcal{L}$ erfolgt zunächst rasch, verlangsamt sich im weiteren Verlauf jedoch drastisch. Die erhaltenen Maximum–Likelihood Schätzer sind asymptotisch normalverteilt, d.h. bei der Bestimmung

[9] Für die Berechnung der Verteilungen der Systemvariablen benötigt man die bestmöglichen Schätzer $\vec{x}(t|N)$ auf der Basis aller Beobachtungen. Diese Werte bezeichnet man auch als Ergebnisse des *Glättungsfilters*. In die Berechnung von $\vec{x}(t|N) = \vec{x}(t|t) + \vec{P}(t|t)\, \mathsf{A}\, \vec{P}^{-1}(t+1|t) \cdot (\vec{x}(t+1|N) - \vec{x}(t+1|t))$ fließt auch Information zukünftiger Werte mit ein, wodurch dieser Schätzer gegenüber dem Kalmanfilter *geglättet* erscheint (Gantert 1989).

der Fehlergrenzen der ermittelten Systemparameter gilt die schon bei der Schätzung von AR Prozessparametern (s. Kap. 3.5) verwendete Ableitung zur Bestimmung der Schätzfehler. Gegenüber anderen Mechanismen (Honerkamp 1994), die mitunter schneller konvergieren, besitzt der EM–Algorithmus den Vorteil einer hohen numerischen Stabilität. Auch bei Startwerten der Iteration, die stark von den wahren Parameter differieren, findet das Verfahren die richtigen Werte. Eine detaillierte Beschreibung des EM–Algorithmus', wie auch ein Vergleich mit anderen konkurrierenden Methoden findet sich bei Gantert (1989), Honerkamp (1994) und Gantert (1993). Das im Rahmen dieser Arbeit verwendete Programm wurde am Freiburger Zentrum für Datenanalyse und Modellbildung entwickelt, wo es auf die Untersuchung der Erregerstrom-Zeitreihen bei Tremorpatienten Anwendung fand (Timmer 1994). Die in diesem Zusammenhang durchgeführten Arbeiten sind die erste gelungene Schätzung der dynamischen Prozessparamter einer auf der Untersuchung physikalischer Zeitreihen beruhenden stochastischen Zeitreihenanalyse.

4.2.2 Bestimmung der Modellordnung

Zur Bestimmung der Modellordnung können eine Vielzahl verschiedener Verfahren benutzt werden, die jedoch alle auf einer Untersuchung der Residuen

$$\vec{r}(t) = \vec{y}(t) - \mathsf{C} \cdot \vec{x}(t) \tag{4.26}$$

basieren. Der Grundgedanke der Verfahren ist der folgende: Beschreibt ein AR[p] Modell in ausreichender Weise die in der Variabilität der untersuchten Zeitreihe sichtbare Prozessdynamik, so beschreibt die Zeitreihe der Residuen $\vec{r}(t)$ im Idealfall ein Weißes Rauschen. Gelingt es dem AR[p] Modell nicht, die Dynamik vollständig zu erfassen, so manifestiert sich dies in zeitlichen Korrelationen, die in den Residuen verbleiben.

Man qualifiziert die Modellanpassung daher mit einem Test auf nicht korrelierte Residuen. Die gesuchte Modellordnung p der LSSM AR[p] Beschreibung ist dann erreicht, wenn die Residuen eines Modells *weiß* werden, d.h. wenn die Komplexität des Modells die zeitlichen Strukturen der untersuchten Zeitreihe ausreichend beschreibt. Als Maßzahl dieser Qualifizierung wird das Resultat eines Kolmogorov-Smirnov-Tests (KS–Test) verwendet, der die Zeitreihe $\vec{r}(t)$ mit der Nullhypothese eines Weißen Rauschens vergleicht (Gantert 1989, Press et al. 1992). Hierbei ist anzumerken, daß nur für den Fall, daß das angepasste Modell *exakt* dem wirklich vorliegenden Prozess entspricht, die Wahrscheinlichkeit des KS-Tests nahe 100% zu liegen kommt. Abweichungen einer exakten AR[p] Beschreibung treten immer dann auf, wenn die Dynamik einer Zeitreihe zwar durch einen AR[p] Prozeß dominiert wird, es aber noch zusätzliche Beiträge gibt, deren marginaler Einfluss ausreicht, empfindliche Tests auf unkorrelierte, Gauss'sche

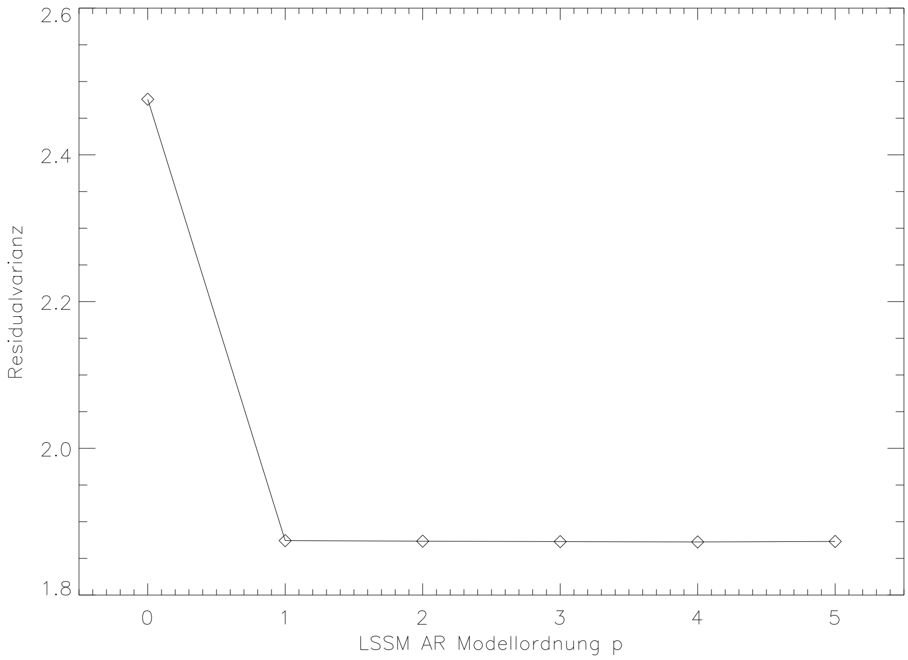


Abbildung 4.2: Verlauf der Varianz der Residuen der LSSM AR[p] Modellanpassung in Abhängigkeit der Modellordnung (für die Resultate aus Tab. 4.1).

Residuen bzgl. ihrer Aussagekraft abzuschwächen[10]. Eine verläßlichere, weil robustere Hilfe bei der Bestimmung der korrekten Modellordnung findet sich in der Untersuchung der Residualvarianzen (Timmer 1997). Trägt man die Varianz von $\vec{r}(t)$ in Abhängigkeit zur Modellordnung p auf, so zeigt sich ein deutlicher Abfall der Varianz, wenn die Komplexität des angepassten AR[p] Modells die zeitlichen Strukturen der Reihe ausreichend beschreibt (s. Abb. 4.2).

Die für die gegebene Zeitreihe durchgeführte Anpassung eines linearen Zustandsraummodelles ergab die in Tabelle 4.1 aufgeführten Resultate. Wie zu erwarten war, liefert ein AR[0] LSSM einen schlechten Fit, da die Meßwerte sicher nicht mit Weißem Rauschen zu beschreiben sind. Demgegenüber beschreibt ein AR[1] LSSM einen sehr guten Fit, da hier der KS-Test auf weiße Residuen fast 100% liefert, die Dynamik also nahezu vollständig vom stochastischen Prozeß erfaßt wird. Der zugeordnete Relaxator besitzt, angegeben in Zeiteinheiten der untersuchten Zeitreihe, eine Relaxationszeit von $\tau = 196$ Zeiteinheiten. Die Residualvarianz geht bei der Modellanpassung AR[0] $\rightarrow$ AR[1] auf 76% der Reihenvarianz zurück, und bleibt auch bei folgenden, komplexeren Modellanpassungen ($p > 1$) auf diesem Niveau. Die aufgeführten Fitergebnisse höherer Modellord-

[10]In der Praxis sind solche Einflüsse z.B. eine Abweichung von der Normalverteilung wie sie bei einer Poisson'schen Verteilung der Residuen auftreten kann, oder aber Korrelationen, wie sie in der Meßprozedur durch die verwendete Elektronik erzeugt werden.

Tabelle 4.1: Ergebnisse der LSSM AR[p] Fits an die Zeitreihe aus Abb. 4.1

p	$\sigma_r^{2\,a}$	Itr.^{b}	C	A	τ^c	P^d	KS Test^e
0	2.476	2	-	-	-	-	0.2687 / 0.0%
1	1.874	589	0.087	0.994916	196.18	0	0.0064 / 99.8%
2	1.873	1302	0.205	0.995091	203.19	0	0.0108 / 77.2%
			0.085	0.328943	0.90	0	
3	1.873	603	1.109	0.994907	195.84	0	0.0059 / 99.9%
			-1.365	0.255838	0.73	0	
			0.087	0.007296	0.20	0	
4	1.872	1001	-0.211	0.994842	193.38	0	0.0068 / 99.5%
			0.022	0.046520	0.33	0	
			-0.865	0.485650	2.61	8.07	
			0.087	0.478910	-	-	
5	1.873	539	$9.4{\cdot}10^{-6}$	0.994885	195.00	0	0.0061 / 99.9%
			$8.9{\cdot}10^{-6}$	0.356299	0.97	0	
			0.712	0.001316	0.15	0	
			-1.292	0.499998	2.89	8.00	
			0.087	0.500000	-	-	

^{a}Residualvarianz, ^{b}Anzahl der benötigtenEM-Iterationsschritte, ^{c,d}Relaxationszeiten τ und Perioden P der Relaxatoren bzw. gedämpften Oszillatoren, ^{e}Supremum und Wahrscheinlichkeit des Kolmogorov-Smirnov Test auf Weißes Rauschen der Residuen.

nungen bestätigen immer die Existenz des schon gefundenen Relaxators. Alle weiteren Beschreibungsansätze, d.h. hinzukommende Relaxatoren (Relaxationszeiten τ_i), wie auch gedämpfte Oszillatoren (Relaxationszeiten τ_i und Perioden P_i), besitzen nur peripħären Einfluss, da ihre kurzen Relaxationszeiten eine starke Dämpfung dieser Komponenten bewirken.

Die Residuen der AR[1] LSSM Modellanpassung zeigen in guter Näherung eine Gauss'sche Wahrscheinlichkeitsverteilung (s. Abb. 4.3). Die in der Verteilungsfunktion (Abb. 4.3a) eingezeichneten 1σ Werte entsprechen der Schätzung für die Varianz des Beobachtungsrauschens $R = 1.874$ aus dem angepaßten Zustandsraummodell. Damit konnte gezeigt werden, daß nicht nur die Vorbedingung der Unkorreliertheit des Rauschbeitrages $\eta(t)$, sondern auch noch die angenommene Gauss'sche Wahrscheinlichkeitsverteilung von dieser Zufallsvariablen erfüllt wird (König & Timmer 1997). Die für die beispielhafte Durchführung einer AR[p] Modellanpassung verwendete Zeitreihe aus Abb. 4.1 läßt sich auch bildlich vom Rauschbeitrag befreien, indem man die Kalmanschätzung der Systemvariablen $x(t)$ für die Best–Fit Parameter darstellt (s. Abb. 4.4).

Die Parameterschätzung von a_1 erfolgt weitgehend unabhängig von der Varianz

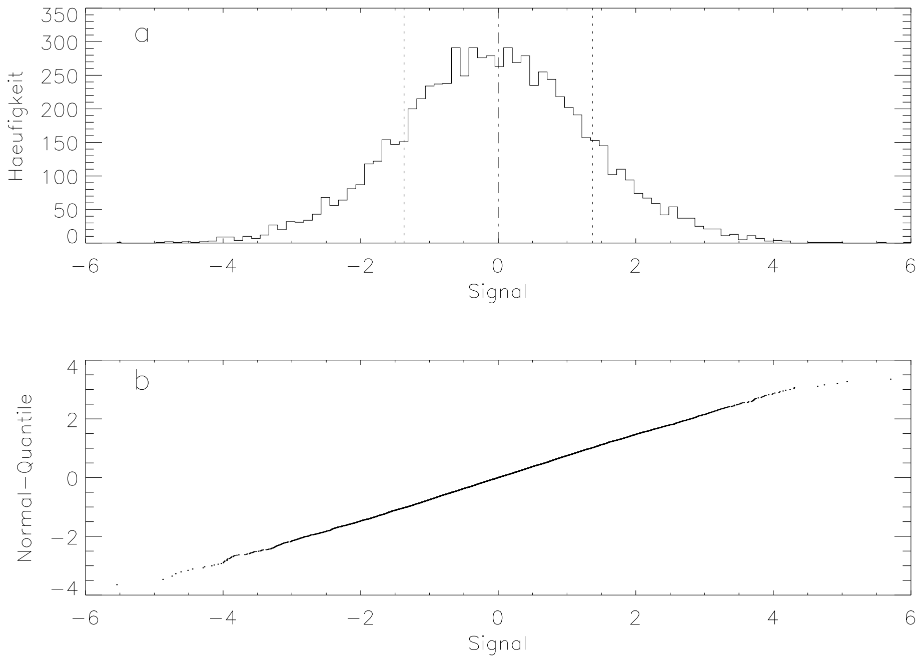


Abbildung 4.3: a) Verteilung und zugehöriges b) Normalquantile-Diagramm der Residuen des AR[1] LSSM Modelles am Beispiel der Zeitreihe aus Abb. 4.1 ($\sigma_r^2 = 1.369^2 = 1.874$). Ein Quantile-Diagramm, daß die Beiträge der Verteilung kumuliert, beschreibt im Falle einer Normalverteilung eine Gerade.

R des Beobachtungsrauschens. Simulationen haben gezeigt, daß für Werte $R/\sigma_y^2 = 0 \ldots 0.9$ (im diskutierten Beispiel ist $R/\sigma_y^2 = 0.76$) eine sichere Bestimmung des dynamischen Parameters möglich ist[11].

Gelingt es nicht, durch die Anwendung eines LSSM AR[p] Modelles eine befriedigende Anpassung an die gemessene Zeitreihe zu erzielen, so ist die Annahme eines stationären, linearen stochastischen Prozesses $x(t)$ verletzt. Dies kann dann der Fall sein, wenn die Zeitreihe einen die realisierte Messung dominierenden Trend enthält, der speziell der Voraussetzung der Stationarität widerspricht[12]. Nichtstationäre Zustandsraummodelle (mit zeitabhängigen Parameter $\mathsf{A}(t)$ und $\mathsf{C}(t)$) stellen eine Verallgemeinerung der stochastischen Modellbeschreibung dar, sind aber momentan (Mai 1997) noch nicht analytisch zu fassen (Gantert 1993). Als naheliegende Erweiterung der LSSM Beschreibung bieten sich nichtlineare Zustandsraummodelle an, die in System- und Beobachtungsgleichung beliebige funktionale Zusammenhänge zulassen und desweiteren auf die strikte Normal-

[11]Überschreitet die Varianz des Beobachtungsrauschens das 90% Niveau der Reihenvarianz, werden zeitliche Korrelationen derart gestört, daß selbst eine LSSM Schätzung fehlschlägt.

[12]Betrachtet man z.B. einen AR[1] Prozess, dessen Relaxationszeit die Beobachtungszeit übertrifft, so liefert ein LSSM AR[1] Fit immer ein Modell mit $\tau \approx T_{\mathrm{Ges}}$.

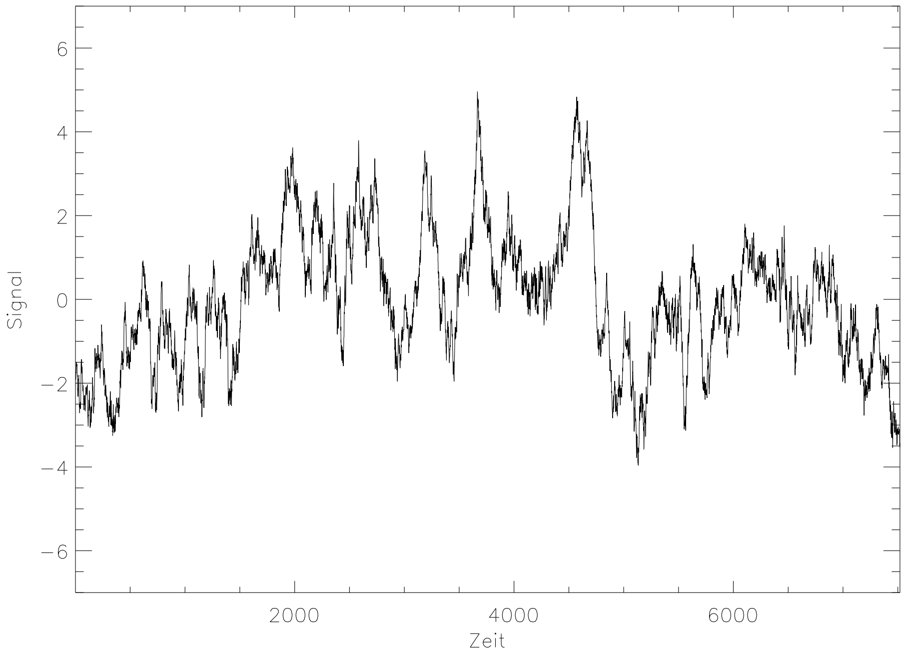


Abbildung 4.4: Geschätzte AR[1] Zeitreihe $x(t)$ für die Beobachtung $y(t)$ aus Abb. 4.1. Beide Achsen sind der Darstellung der Originallichtkurve angepaßt.

verteilung der Rauschanteile verzichten. Mit diesen Erweiterungen sind schwere Nachteile bei der Parameterschätzung verbunden, da die Likelihoodfunktion nicht mehr berechenbar ist und daher versucht werden muß, die nichtlinearen Anteile durch Simulationen oder durch Näherungslösungen abzuschätzen (Gantert 1993).

Versagen stochastische Methoden der Beschreibung, so stellen chaotische, d.h. nichtlinear-deterministische Modelle eine letzte Alternative dar, um die Dynamik einer irregulär verlaufenden Zeitreihe zu erklären (Casdagli 1992). Eine Bewertung, durch welche Modellform eine Beobachtungszeitreihe am besten beschrieben wird, kann nur am Einzelfall geschehen (Bräuer 1996[13]). Eine Untersuchung der EXOSAT Röntgenlichtkurven auf Hinweise auf eine mögliche Existenz von niedrig-dimensionalen Attraktoren erbrachte keine zufriedenstellenden Resultate (Lehto et al. 1993[14]).

In diesem Zusammenhang ist hervorzuheben, daß es prinzipiell möglich ist, zwischen chaotischen und stochastischen Modellbeschreibungen zu unterscheiden.

[13]Dr. Bräuer hat die hier mit dem LSSM untersuchte AGN Zeitreihe alternativ mit einer chaotischen Modellbeschreibung zu modellieren versucht. Dieser Versuch schlug jedoch fehl, da der chaotische Ansatz nicht zu einer endlichen Einbettungsdimension führte.

[14]Nur im Fall der Seyfertgalaxie NGC 4051 ergab sich eine endliche Einbettungsdimension des chaotischen Systems. Die Autoren weisen jedoch darauf hin, daß die Anwendung stochastischer Modellbeschreibungen mehr Erfolg verspricht — ohne dies jedoch näher zu erläutern.

Zerlegt man eine Zeitreihe in Einzelstücke der Länge T, so kann man versuchen, Prognosen zu erstellen und diese ob ihrer Qualität zu vergleichen, und eine Aussage über die Art der zeitlichen Entwicklung des Prognosefehlers zu machen. Am Beispiel der Zeitreihen der Helligkeitsvariationen Aktiver Galaxien konnte gezeigt werden, daß die Qualität der Vorhersagen mit $T^{-\mathrm{const}}$ abnimmt, was für ein stochastisches Modell spricht, da im Falle einer chaotischen Beschreibung ein exponentieller Zerfall mit e^{-T} auftreten würde (Czerny & Lehto 1996).

Kapitel 5

Analyse des EXOSAT AGN Samples

5.1 Aktive Galaxien

5.1.1 Phänomenologie

Zu Anfang extragalaktischer Forschung stieß man bald auf Galaxien, die sich in ihren optischen Spektren von anderen, *normalen* Galaxien unterschieden. Carl Seyfert veröffentlichte 1943 eine Liste von 12 Spiralgalaxien, die, verglichen mit Galaxien gleichen morphologischen Typs, einen abnormal hellen Kern und Emissionslinien im Spektrum aufwiesen. Mit dieser Entdeckung begann die Erforschung einer neuen Gruppe astronomischer Objekte, der *Aktiven Galaxien* (AGN *active galactic nuclei*).

Das Emissionsspektrum Aktiver Galaxien überdeckt das ganze elektromagnetische Spektrum[1], vom Radioband bis in den Bereich der energiereichsten elektromagnetischen Wellen, der Gammastrahlung , beobachtet man diese Quellen (dies entspricht 20 Größenordnungen im Frequenzbereich). Die Emission im Röntgenbereich (Energiebereich 0.1 − 50 keV) ist eine der zentralen Eigenschaften der Aktiven Galaxien, die zum ersten Mal in den 60er Jahren unseres Jahrhunderts durch Ballon– und Raketenflüge beobachtet werden konnte[2] (Quasar 3C 273,

[1]Der modernen Teleskopen und Detektoren zugängliche Bereich des elektromagnetischen Spektrums reicht von den Radiowellenlängen (< 1 cm), über die Mikrowellen (1 cm ... 0.1 mm), dem Infraroten ($10^{-4} \ldots 10^{-6}$ m), dem sichtbaren Bereich optischer Wellenlängen (650... 350 nm, 1nm = 10^{-9} m) bis zu dem ultravioletten Bereich (100 ... 10 nm). Den Abschluß bilden die Röntgenstrahlung (1 nm ... 0.001 nm) und die Gammastrahlung (< 10^{-13} m). Die hier gegebenen Wellenlängen lassen sich mit $E(\lambda_{\rm nm}) = 1240/\lambda_{\rm nm}$ eV in Energiebeträge umrechnen.

[2]Der erste Raketenflug (Aerobee150 Forschungsrakete), bei dem erstmals extragalaktische Röntgenquellen gesichtet wurden, fand am 14. Juni 1969 in Natal (Brasilien) statt. Mit zwei

Bowyer et al. 1970). Die erste große Zusammenstellung von Röntgenquellen, die auf den ersten Röntgensatelliten Uhuru (1970) zurückgeht (Giacconi et al. 1974), enthielt 3 extragalaktische Quellen (3C 273, NGC 4151, Cen A). Im Laufe der Jahre wuchs die Zahl der bekannten extragalaktischen Röntgenquellen durch die nachfolgenden Satellitenmissionen[3] (ARIEL V 1974, HEAO-1 1977, HEAO-2 (Einstein) 1978, EXOSAT 1983, Ginga 1987, ROSAT 1990, BBXRT 1990, ASCA 1993) auf mehr als 30 000 Objekte an. Dieser enorme Fortschritt ist der um Größenordnungen gewachsenen Orts-, Zeit- und Energieauflösung der detektierten Röntgenstrahlung zu verdanken (Bradt et al. 1992).

Das allen Aktiven Galaxien eigene, überhelle Zentrum beherbergt das Energiezentrum dieser Klasse der leuchtkräftigsten astronomischen Objekte. Der Bereich der Leuchtkräfte, den die verschiedenen Mitglieder der Gruppe der Aktiven Galaxien abdecken, reicht von 10^{40} bis 10^{48} erg/s. Die einzig in Frage kommende Energiequelle ist die Umsetzung von Gravitationsenergie akkretierter Materie in Strahlungsenergie (vorwiegend als Röntgenstrahlung) im Potentialtopf eines supermassiven Schwarzen Loches im Galaxienzentrum. Diese Strahlungsumsetzung, d.h. das Zuströmen von Gas auf die Zentralmasse stellt vermutlich den Unterschied zu einer *normalen* Galaxie dar (Woltjer 1990). Da man auch in nicht–aktiven Galaxien, wie auch im Zentrum der Milchstraße, sich bewegende Gasfilamente ausmachen kann, liegt der Schluß nahe, daß Aktive Galaxien eine aktive Phase im Entwicklungsweg einer Galaxie darstellen. Eine Möglichkeit, die eine zentrale Massenakkretion auslösen könnte, wären etwa störende Gezeitenwechselwirkungen durch Nachbargalaxien, wie sie in Galaxienhaufen auftreten können.

Das Zentrum umgibt eine optisch dichte Akkretionsscheibe, in der durch viskose und turbulente Wechselwirkung akkretiertes Material Drehimpuls verliert. Die dissipierte Energie führt dazu, daß die Akkretionsscheibe selbst im optischen und ultravioletten Spektralbereich strahlt. Die Röntgenstrahlung der Aktiven Galaxien entsteht in einer ersten Reprozessierung nahe des Schwarzen Loches durch eine, den Innenbereich umschließende, heiße Elektronenkorona (thermische Comptonisierung, Urry & Padovani 1995). Dieses, für alle Aktiven Galaxien als gültig angenommene Szenario, wird als *unified paradigm*, als Standardmodell für AGNs heutzutage gemeinhin akzeptiert (Woltjer 1990, Antonucci 1993, Urry & Padovani 1995). Diesem Modell zufolge besitzen alle AGNs eine einheitliche Architektur und die beobachtete Vielschichtigkeit der Erscheinungsformen ergibt sich als Auswahleffekt durch die Beobachtungsrichtung, durch Effekte in der Umgebung des Zentralgebietes und durch das Auftreten von Radioemissi-

---

Detektoren, einem Proportionalzähler im Energiebereich $0.2 - 10$ keV und einem Szintillationszähler im Bereich von $10 - 30$ keV wurden die Galaxien Cen A, 3C 273 und M 87 nachfolgend beobachtet, wobei die Objekte jeweils nur etwa 10 sec lang im Gesichtsfeld waren (Bowyer et al. 1970).

[3]Die aufgeführten Satelliten stellen nur eine unvollständige Auswahl der wichtigsten Missionen dar. Eine ausführliche Zusammenstellung findet sich bei http://heasarc.gsfc.nasa.gov-/docs/heasarc/missions.

on. Skalierender und zugleich wichtigster Parameter bzgl. der AGN Leuchtkraft ist die Zentralmasse M. Nimmt man eine sphärische Strahlungsemission an, so kann man aus dem sich bei der Akkretion ergebenden Gleichgewicht zwischen Gravitations– und Strahlungsdruck die maximale Leuchtkraft $L_{\rm Edd}$ abschätzen[4].

$$L_{\rm Edd} = 4\pi \, \frac{G m_{\rm p} c}{\sigma_{\rm T}} \, M = 1.3 \cdot 10^{46} \, \frac{M}{10^8 M_\odot} \, \mathrm{erg/s} \tag{5.1}$$

Ein weiterer AGN Parameter, der sich aus der Zentralmasse ableiten läßt, ist der *Schwarzschildradius* r_S, der den kleinsten möglichen Bereich beschreibt, aus dem emittierte Photonen noch entweichen können.

$$\begin{aligned} r_S &= \frac{2\,G\,M}{c^2} \\ &\approx 2.95 \, \frac{M}{M_\odot} \, \mathrm{km} \\ &\approx c \cdot 984 \, \frac{M}{10^8 \, M_\odot} \, \mathrm{sec} \end{aligned} \tag{5.2}$$

Im Falle eines nicht rotierenden Schwarzen Loches liegt der letzte stabile Orbit akkretierter Materie bei $3\,r_S$. Bei vorliegender Kerrgeometrie (rotierendes Schwarzes Loch) ist dieser Radius kleiner, wodurch auch die Effizienz η des Umwandlungsprozesses von Gravitationsenergie in Röntgenstrahlung von 5.7% auf maximal 42% ansteigt (Shapiro & Teukolsky 1983).

Benutzt man die Eddington–Leuchtkraft, so kann man, bei einer angenommener Größe R des Emissionszentrums, die Photonendichte, bzw. den daraus abgeleiteten dimensionslosen *compactness* Parameter ℓ angeben, der z.B. bei der Paarbildungsprozessen oder der Produktion von Gamma–Strahlung wichtig wird[5].

$$\ell = \frac{\sigma_{\rm T}}{4\pi m_e c^3} \, \frac{L}{R} \tag{5.3}$$

Die wichtigsten Unterscheidungskriterien in der Gruppe der Aktiven Galaxien sind die Radioleuchtkraft und die Breite optischer und ultravioletter Spektrallinien. Als *radiolaut* werden in der Regel die AGNs bezeichnet, deren Radioemission

[4] Die Eddington-Leuchtkraft stellt eine obere Grenze dar, wobei berücksichtigt werden muß, daß bei nicht–sphärischer Emission eine Galaxie diesen Wert durch *Doppler boosting* auch übertreffen kann (Thomson-Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\rm T}$ für Elektronenstreuung, Protonenmasse $m_{\rm p}$).

[5] Überschreitet die *compactness* den Wert $h\nu/m_e c^2$, so ist es für Photonen der Energie $h\nu$ nicht möglich, die Quelle zu verlassen, ohne e^+e^-–Paare zu erzeugen. Setzt man die Eddington–Leuchtkraft und $R = \frac{m_p}{m_e} r_G$ (*Gravitationsradius* $r_G = r_S/2$) in die gegebene Formel ein, so wird $\ell = 1$ (Blandford 1990).

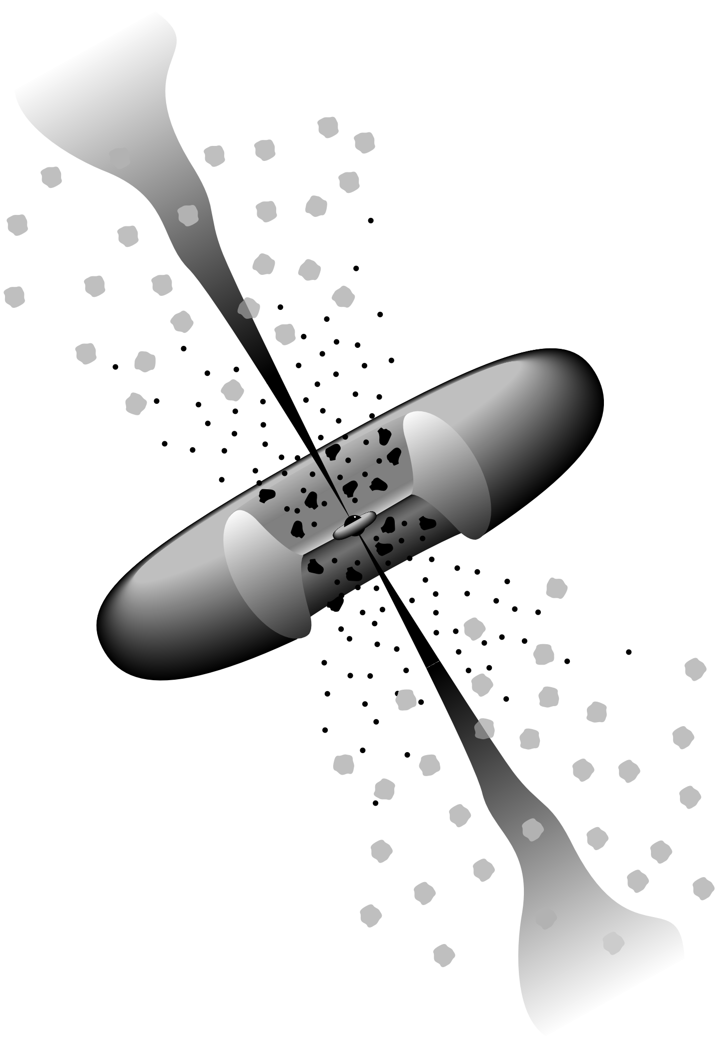


Abbildung 5.1: Schemadarstellung einer radiolauten Aktiven Galaxie nach dem gegenwärtigen Standardmodell (aus Urry & Padovani 1995). Das zentrale Schwarze Loch wird von einer Akkretionsscheibe umgeben, deren Innenbereich aufgebläht ist (kleine, umringte schwarze Kugel in der Bildmitte). Ober– und unterhalb der optisch dicken und geometrisch dünne Akkretionsscheibe liegt die *broad line region* (schwarze Flecken), die, durch den die Scheibe umgebenden Staubtorus (angeschnittener Ring), je nach Beobachtungsrichtung, verdeckt werden können. Eine Korona aus heißen Elektronen (schwarze Punkte) und die Plasmawolken der weiter außen liegenden *narrow line region* (graue Flecken) bestimmen bei großen Inklinationswinkeln durch Reprozessierung primärer Strahlung das AGN Erscheinungsbild. Zusätzlich zeigen radiolaute Aktive Galaxien kollimierte Plasmaausflüsse, sog. *jets*, die in hellen Radioblasen münden.

Tabelle 5.1: Taxonomie Aktiver Galaxien

Radio Emission	Optische Emissionslinien		
	Typ 2	Typ 1	-
radio–leise	Seyfert 2	Seyfert 1 Quasare LINERs	
radio–laut	NLRG (FR I/II)	BLRG SSLD FSCD	Blazare (BL Lacs, OVV HPQ, FSCD)
	Abnahme des Inklinationswinkels $\rightarrow$		

$P_{1.4\ \mathrm{GHz}} > 10^{25}$ W Hz^{-1} ist. Etwa 85% der beobachteten Aktiven Galaxien kommen jedoch als *radioleise* Objekte vor, die meisten davon sind Seyfertgalaxien und Quasare. Die Emissionslinienbreite entsteht durch die bewegungsbedingte Geschwindigkeitsdispersion der emittierenden Regionen (Dopplereffekt). Enthalten die Flußspektren erlaubte und verbotene (Hβ, [OIII]λ5007) Emissionslinien, deren Äquivalentbreiten zwischen 200–1000 km/s liegen, so klassifiziert man die Galaxie als Typ 2 AGN. Treten zusätzliche breite erlaubte Emissionslinien mit Breiten im Bereich von $1000 - 10\ 000$ km/s auf, handelt es sich um den Typ 1. Die Flußverhältnisse der Linien, wie auch die fehlenden verbotenen breiten Linien, lassen den Schluß zu, daß die Emissionsregionen dieser breiten Linien, die sog. *broad line regions* (BLR), optisch dichte Wolken sind (da Stoßabregung verbotene Linien ausschließt), die sich im Bereich von 10 – 1000 Lichttagen um das Schwarze Loch bewegen (Urry & Padovani 1995, Wandel & Boller 1997). Entsprechend schließt man auf die Existenz der *narrow line region*, in der Wolken mit deutlich geringerer Elektronendichte (n_e(NLR) $\approx 10^4$ cm^{-3} gegenüber n_e(BLR) $\approx 10^8$ cm^{-3}), die eine Ausdehnung von 100-1000 Lichtjahren besitzt.

Da man z.B. bei den Seyfert 2 Galaxien keine breiten Emissionslinien beobachtet, wohl aber eine stärkere Polarisation feststellt, folgt aus dem Standardmodell, daß hier die BLR nicht beobachtet werden kann, da ein die Akkretionsscheibe umgebender Staubtorus ($\approx$ 1 Lichtjahr Durchmesser) den direkten Einblick auf die Zentralregion (mit BLR) verwehrt. Diese Sichtweise wird auch dadurch bestätigt, daß Seyfert 2 Galaxien leuchtschwächer als Seyfertgalaxien vom Typ 1 und ihre Spektren oft durch die dominierende Streustrahlung (Polarisation) gerötet erscheinen Woltjer 1990). Der Unterschied zwischen den Seyfert 1 Galaxien und radioleisen Quasaren liegt vermutlich nur in der größeren Entfernung der Quasare, wodurch die den aktiven Kern umgebenden leuchtschwachen Gasstrukturen nur bei den Seyfert 1 Galaxien beobachtbar sind (meist Spiralsysteme, Khachikian & Weedman 1974, Antonucci 1993). Unter der Annahme einer Rotationsverbreiterung der beobachteten Emissionslinien der Seyfert 1 Galaxien kann gezeigt werden, daß keine Verbindung der beobachtenen Linienbreite zur Ebene

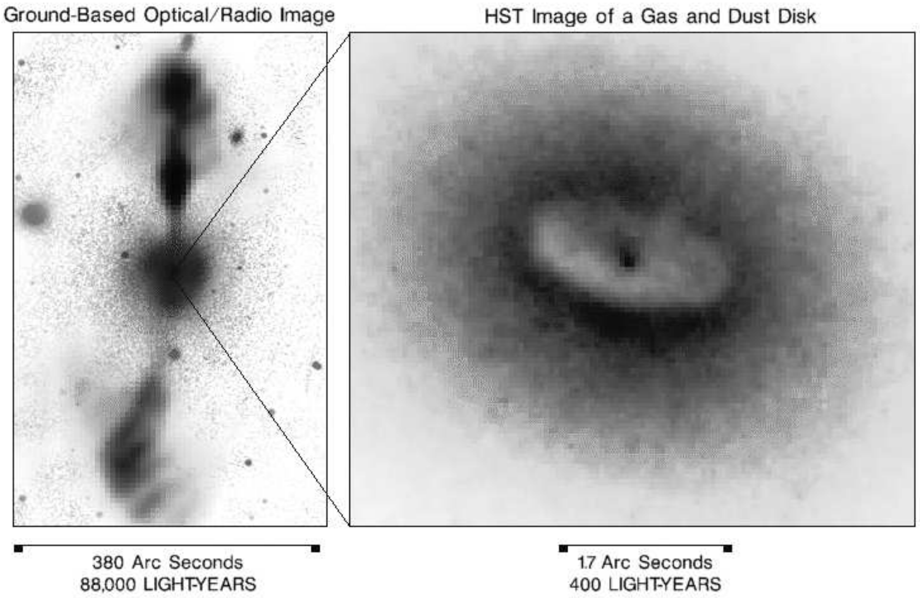


Abbildung 5.2: (links) Kompositbild der Jets der Radiogalaxie NGC 4261 mit einem optischen Bild der Galaxie, (rechts) und hochaufgelöstes HST–Bild des Staubtorus' im Galaxienzentrum (Space Telescope Science Institute, http://oposite.stsci.edu).

der umgebenden Galaxie besteht (Tholine & Osterbrock 1982). Sollte solch eine Korrelation bestehen, müssten *face–on* betrachtete Spiralgalaxien schmalere Emissionslinien aufweisen als *edge–on* beobachtete Systeme. Der zentrale Bereich erscheint mit Akkretionsscheibe und BLR vom Rest der Galaxie abgekoppelt. Die weiter außen liegende NLR kann dagegen prinzipiell mit dem Innenbereich der galaktischen Scheibe wechselwirken und so die Akkretionsrate beeinflussen.

Die in Tab. 5.1 bei den Typ 1 AGN aufgeführte Gruppe der *low ionisation nuclear emission line region* Galaxien (LINERs) sind die leuchtschwächsten und zugleich häufigsten AGNs. Wenigstens 30% aller Spiralgalaxien zeigen mit schmalen Emissionslinien schwach angeregter Atome (meist [OII]λ3727, [NII]λ6563) diesen Hinweis auf zentrale Aktivität. Da man zusätzlich noch Ansätze breiter Hα Linienflügel mißt, wird vermutet, daß es sich bei den LINERs um leuchtschwache Seyfert 1 Galaxien handelt[6] (Netzer 1990).

Historisch bedingt wurden extragalaktische Radioquellen in zwei Klassen, in Radioquasare mit flachen und steilem Radiospektrum (Fluß$\propto$ $\nu^{-\alpha}$, $\alpha \gtrless 0.5$) unterteilt. Dabei besitzen ausgedehnte Quellen, deren Hauptanteil an Radioemission aus der Galaxie assoziierten Regionen (*radio lobes*) stammt, ein steiles Spektrum (SSLD *steep spectrum lobe dominated*), wohingegen kompakte Radio-

[6]LINERs werden nur aufgrund ihrer optischen Spektrallinien als AGN klassifiziert. Das Erscheinungsbild in anderen Spektralbereichen entspricht dem *normaler* Galaxien.

quellen ein flacheres Spektrum aufweisen (FSCD *flat spectrum core dominated*). Bei der Radioemission handelt es sich sehr wahrscheinlich um Strahlung aus einem Synchrotronprozeß bei dem, von der Galaxie stammende, sich relativistisch bewegende, geladene Teilchen an Magnetfeldern des aufgeschobenen interstellaren Mediums abgebremst werden.

Die Gruppe der ausgedehnten Radioquellen unterteilt man, je nach Leuchtkraft (Leuchtkraft $L_{178\mathrm{MHz}} \gtrless 2 \cdot 10^{25} \mathrm{WHz}^{-1}\mathrm{sr}^{-1}$) und Radiomorphologie weiter in FR I und FR II Radiogalaxien (Fanaroff & Riley 1974). Die leuchtstärkeren FR II Objekte weisen meist enge, im Radiolicht leuchtende, Verbindungen zwischen Galaxienkern und ausgedehnter Radioquelle, sog. *jets*, auf, deren Radioemission linear polarisiert ist und senkrecht zur Orientierungsrichtung steht. Dies spricht für eine mit dem *jet* ausgerichtete Magnetfeldkomponente. Im Vergleich zu den leuchtschwächeren FR I Radiogalaxien erscheinen die FR II *radio lobes* heller und örtlich besser definiert, man spricht daher auch von den *hot spots* der Radioemission (Urry & Padovani 1995). FR I Radiogalaxien zeigen meist zwei, weit vom Galaxienzentrum entfernte (bis zu einigen 100 kpc), diametral ausgerichtete *jets* mit annähernd gleicher Leuchtkraft, deren Polarisation auf ein senkrecht zur Jetachse stehendes Magnetfeld hindeutet. Als ein Grund für diese Unterscheidung der Radiogalaxien wird die Überhäufigkeit der FR I Objekte in reichen Galaxienhaufen diskutiert, da hier Gezeitenwechselwirkungen mit Nachbargalaxien das Auftreten von gestörten und weniger geordnet erscheinenden Radiostrukturen bewirken können (Parma 1992).

Die meisten der kompakten Radioquellen entsprechen Quasaren, einige von ihnen gehören zu sog. BL Lac Objekten[7], die man oft in aktiven elliptischen Galaxien antrifft. Diese Objekte bilden zusammen mit den OVVs, *optical violent variables*, und den HPQs, *highly polarized quasars*, die AGN Gruppe der *Blazare*, die sich durch strukturarme Energiespektren, schnelle Flussveränderungen und stark polarisierte optische Emission auszeichnen (Antonucci 1993). Mitunter werden FSCD Objekte auch in diese Gruppe mitaufgenommen, da ihr nichtthermisches Breitbandspektrum sehr dem der BL Lacs ähnelt. Je nach Autor und Schwerpunkt der Beobachtung variiert die Zuordnung der Typen dieser Gruppe Aktiver Galaxien (Woltjer 1990). Durch den, in Blazaren angenommenen kleinen Betrachtungswinkel θ der Akkretionsscheibe, wird des Erscheinungsbild maßgeblich beeinflußt. Die beobachtete Leuchtkraft L_{obs} übertrifft durch relativistisches *Doppler boosting* die wirkliche Quelleuchtkraft L_0 im Ruhesystem.

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{obs}}(\nu_{\mathrm{obs}}) &= \delta^3 \cdot L_0(\nu_0) \quad \text{mit} \quad \nu_{\mathrm{obs}} = \delta\,\nu_{\mathrm{o}} \qquad (5.4) \\ \text{wobei gilt:} \quad \delta &= \frac{1}{\gamma(1-\beta\cos(\theta))}\,, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \quad \beta = \frac{v_{\mathrm{jet}}}{c} \end{aligned}$$

[7] Diese Klasse wurde nach dem Prototyp benannt, der schon als optischer Veränderlicher bekannt war, noch bevor man wußte, daß es sich um extragalaktische Objekte handelte.

Die Überschätzung der Leuchtkraft kann bis zu drei Größenordnungen betragen, wobei durch große Werte für γ auch eine starke Kollimierung der Strahlung bewirkt wird (Öffnungswinkel des Strahlungskegels ist γ^{-1}). Als weitere Auswirkung dieses Blickrichtungseffektes beobachtet man in Blazaren oft scheinbare Überlichtgeschwindigkeiten von Emissionsstrukturen. Dieses Phänomen erklärt sich als Projektionseffekt, wobei Unterschiede in den Lichtlaufzeiten von sich relativistisch bewegende Emissionsregionen in den *jets* diese *super luminal motion* suggerieren (Rybicki & Lightman 1979).

Auch in Hinblick auf die Wirksamkeit des Standardmodells Aktiver Galaxien, ist es bei der Betrachtung von Blazaren wichtig, zu realisieren, daß das Erscheinungsbild dieser Gruppe Aktiver Galaxien über den gesamten Energiebereich durch den in Ausbreitungsrichtung betrachteten *jet* dominiert wird. Die Emission des *jets* wird i.a. die des Galaxienkerns im Hinblick auf die zeitliche und energetische Eigenschaft der Abstrahlung überdecken. Die Synchrotronemission des *jets* ist weitestgehend von der primären Zentrumsquelle physikalisch getrennt, sodaß keine Aussagen über energetisches und zeitliches Verhalten des Galaxienkerns möglich sind (Blandford 1990).

Besitzt eine Radioquelle einen auf uns ausgerichteten *jet*, so erscheint diese Komponente in ihrer Leuchtkraft verstärkt, die Helligkeit des zweiten *jets* wird analog durch das *Doppler boosting* in gleichem Maße abgeschwächt, so daß der Betrachter nur einen dominierenden *jet* wahrnimmt (wie z.B. bei den Radiogalaxien NGC 6251 und M 87). Nimmt der Blickwinkel zu, so reduziert sich der Einfluß der relativistischen Aberration und man erhält den Fall einer kompakten Radioquelle (Mushotzky et al. 1993). Abb. 5.2 zeigt die Radiogalaxie NGC 4261, wobei deutlich zu erkennen ist, daß die Radiojets senkrecht auf der vermuteten Akkretionsscheibe stehen, da der Materieausfluß aus dem Akkretionszentrum nur entlang der Drehimpulsachse der Scheibe ohne Wechselwirkung möglich ist. Die hochrelativistischen geladenen Teilchen in den *jets* werden vermutlich durch Wechselwirkung mit Schockwellen in der Nähe des Schwarzen Loches erzeugt und versorgen die *radio lobes* mit Energie (Fermiprozess, Netzer 1990). Eine mögliche Antwort auf die Frage nach der Entstehung und Ausformung der *jets* liefert die hydrodynamische Bündelung des ausgeworfenen Plasmas durch mitransportierte Magnetfelder. Ursache der Entstehung solcher toroidaler Magnetfelder könnten Störungen in der Magnetosphäre der Akkretionsscheibe sein, wodurch geladene Partikel und das angekoppelte Magnetfeld aus der Scheibenebene entweichen. Während der Propagation zerfällt die parallel zur Scheibennormalen liegende Magnetfeldkomponete langsamer als der toroidale Anteil, wodurch eine Fokussierung in Richtung des Scheibendrehimpulses eintritt. Diese Hypothese wird auch dadurch gestützt, daß in vielen *jets* knotenartige Strukturen zu beobachten sind, wie sie auch von hydromagnetischen Modellrechnungen vorhergesagt werden (Blandford 1990). Diese Modelle zeigen, daß die den *jet* durchlaufenden Schockwellen Störungen im Synchrotronprozess induzieren können, was aufgrund der kurzen

Abklingzeit der Röntgenstrahlung im *jet* Plasma zu schnellen Variationen im Bereich von 300-500 sec in der Lichtkurve führt (Wallinder et al. 1992).

Aus der diskutierten Theorie der *jets* ergibt sich eine interessante Möglichkeit, die Unterscheidung der Aktiven Galaxien in Bezug auf ihre Radioleuchtkraft in das Standardmodell mit einzubeziehen: Besitzt das Schwarze Loch im Galaxienkern keinen Drehimpuls, so kann diese Kollimierung niemals eintreten, und die betrachtete Aktive Galaxie erscheint selbst bei kleinem Inklinationswinkel als radioleises Objekt. Analog würde eine zentrale Kerr–Geometrie eine radiolaute AGN definieren (s. Urry & Padovani 1995).

5.1.2 Energiespektren Aktiver Galaxien

Die nicht–thermische Röntgenemission ist die ubiquitäre Eigenschaft Aktiver Galaxien, die sich in einem den breiten Spektralbereich von $0.5 - 50$ keV gut beschreibendes Potenzgesetz $E \propto E^{-\Gamma}$ manifestiert. Die Steigung Γ im Photonenspektrum liegt typischerweise im Bereich von $1.3 \ldots 2.2$, wobei die angenähert Gauss'sche Verteilung den Mittelwert $\Gamma \approx 1.7$ besitzt. Im Bereich kleiner Energien ($E < 0.5\,\mathrm{keV}$) erfolgt durch Photoionisation an kaltem bzw. nur teilweise ionisiertem Material (typische Säulendichten $N_{\mathrm{H}} = 10^{22}\mathrm{cm}^{-2}$) eine Flußabnahme durch Absorption.

Schon in den ersten Beobachtungen von AGN Röntgenspektren mit besserer Energieauflösung fand man zwar die allgemeine Gültigkeit des Potenzgesetzes als bestimmende Komponente bestätigt, doch traten Abweichungen auf, die eine komplexere spektrale Beschreibung erforderlich machten. So finden sich in Energiespektren Emissionslinienstrukturen, die auf Fluoreszenzstrahlung des häufigsten schweren Elementes Eisen zurückzuführen sind. Liegt das Eisen in neutraler Form vor, liegt die Linie bei 6.4 keV, ist das Material ionisiert, verschiebt sich die Linienenergie zu 6.67 (FeXXV) und 6.95 (FeXXVI) keV mit K–Absorptionskanten zwischen 7.1 und 9.3 keV. Im Bereich von $0.5 - 3$ keV können auch Spektrallinien durch K-Schalenübergänge in O, Mg oder Si entstehen (Mushotzky et al. 1993).

Als weitere spektrale Komponenten, die das einfache Potenzgesetz modifizieren, fanden sich im weichen Energiebereich ($E < 2\,\mathrm{keV}$) der sog. *soft excess* und im Bereich von $E > 10\,\mathrm{keV}$ der sog. *hard tail*. Der *soft excess* wird gemeinhin durch die beitragende Schwarzkörperstrahlung der optisch dichten Akkretionsscheibe erklärt ($T < 150$ eV, Urry & Padovani 1995). Das Strahlungsmaximum dieses *big blue bump* liegt im UV Bereich, der hochenergetische Ausläufer reicht jedoch bis in den Bereich weicher Röntgenstrahlung. Als weitere, *auf* dem Potenzgesetz sitzende, Komponente ergibt sich der sog. *Compton reflection hump*. Dieser Beitrag entsteht durch, an kaltem und optisch dichten Material, reprozessierte primäre Strahlung und besitzt neben einem Kontinuum auch Linienstrukturen (Lightman & White 1988). Das Rückstrahlvermögen des bestrahlten Materials

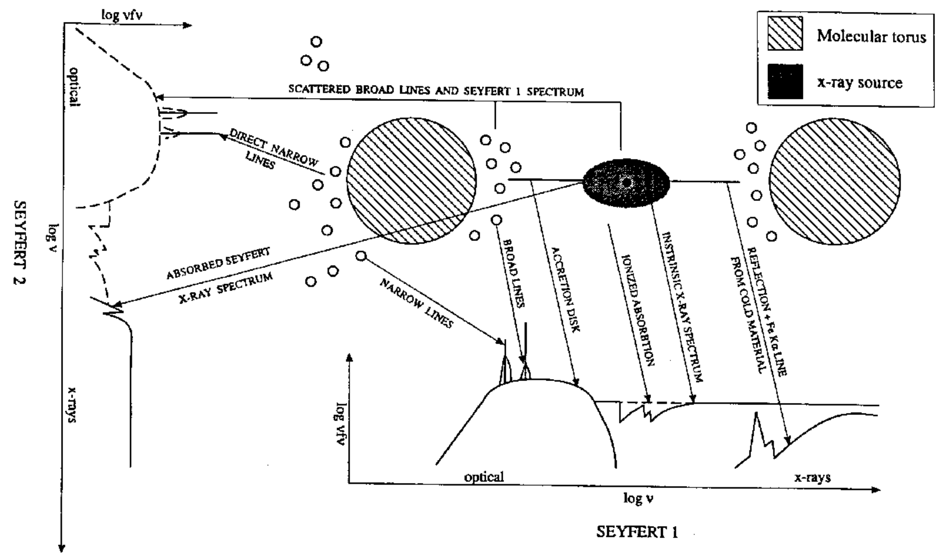


Abbildung 5.3: Standardmodell für radioleise AGN (*big picture* aus Mushotzky et al. (1993)). Die zentrale Röntgenquelle (konstanter Beitrag zum $\nu \cdot F(\nu)$ Spektrum) bestrahlt eine optisch dichte und geometrisch dünne Akkretionsscheibe und erzeugt einen Comptonisierungsbeitrag (im Röntgenbereich) zum Spektrum. Da die Albedo unter 10% liegt, wird der Hauptanteil der Primärstrahlung thermalisiert und durch die Scheibe im UV und weichen Röntgenbereich abgestrahlt (*Buckel* im optischen Bereich). Bei direktem Einblick auf die BLR sieht man breite Spektrallinien (Seyfert 1 Spektrum), bei großen Inklinationswinkeln kann die Emission im UV und im Bereich weicher Röntgenstrahlung nicht direkt beobachtet werden (Seyfert 2 Spektrum, links).

(Comptonstreung an kalten Elektronen) wird im Bereich von 10-30 keV maximal, wodurch der hochenergetische Bereich in Röntgenspektren flacher erscheint (s. Abb. 5.3). Berücksichtigt man diesen Beitrag, so erhält man ein steileres intrinsisches Potenzgesetz mit $\Gamma \approx 1.9$ (Pounds 1990). Alternativ zur Compton–Reflexionskomponente wird ein Modell diskutiert, das die teilweise Bedeckung der primären Röntgenquelle durch kaltes, optisch dichtes Material ($N_{\mathrm{H}} > 10^{23}\mathrm{cm}^{-2}$, Matsuoka et al. 1990) benutzt, um für Photonenenergien $E < 6\,\mathrm{keV}$ einen Teil der Primärkomponente zu absorbieren. Es resultiert ein Photonenspektrum, das sich aus zwei identischen, aber um die Absorption gegeneinander verschobenen, Potenzgesetzen zusammensetzt. Die absorbierte Strahlung wird durch Linienemission freigesetzt (Inoue 1990).

Selbst mit den hier angeführten Modifikationen des reinen Potenzgesetzes kann man die AGN Energiespektren nicht vollständig erklären. Die Spektren von Seyfert 1 Galaxien zeigen noch eine zusätzliche Absorptionskante, die durch hochionisiertes Fe oder O erklärt werden kann (Nandra et al. 1990). Dieses sog. *warm absorber model* bewirkt durch eine Reduktion im Bereich von $E \approx 1\,\mathrm{keV}$ wieder-

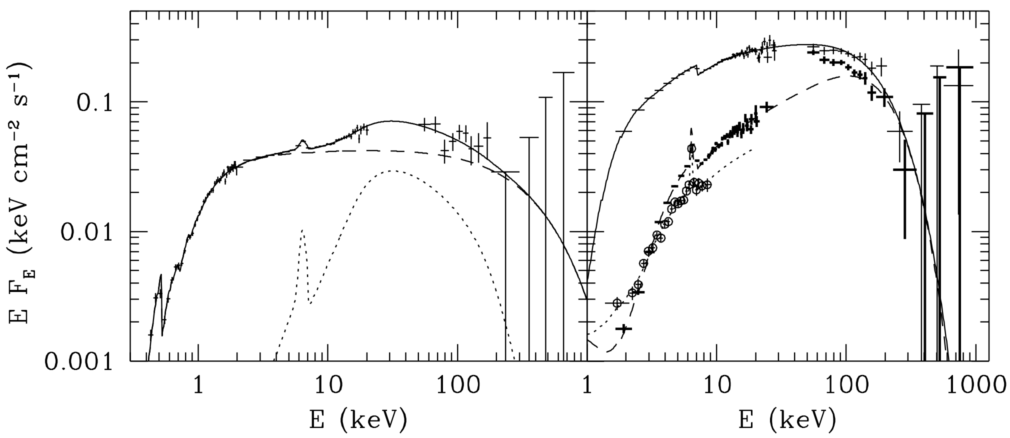


Abbildung 5.4: Breitbandspektren im Röntgen– und Gammabereich (Rosat, Ginga, CGRO OSSE) von IC 4329A (links) und NGC 4151 (rechts) . Das IC 4329A angepasste Spektrum (durchgezogenen Linie) setzt sich aus einem Potenzgesetz ($\Gamma = 1.9$) mit exponentiellen Abfall (*cutoff*) für $E > 300$ MeV (gestrichelte Kurve) und einer Reflexionskomponente an kaltem Material (punktierte Kurve) zusammen. Durch diese Komponente erscheint das Spektrum flacher ($\Gamma_{\mathrm{refl}} = 1.7$) und die Energie des *cutoffs* kleiner ($E_c \approx 50$ keV). Das Spektrum der Seyfertgalaxie NGC 4151 zeigt einen zeitabhängigen Verlauf (s. Text) im Bereich $E < 100\,\mathrm{keV}$ (Svensson 1997).

um ein flacheres Photonenspektrum $\Gamma < 1.9$ (Mushotzky et al. 1993).

Bei einer Untersuchung der Röntgenspektren von 27 Seyfert 1 Galaxien lag bei Anpassung eines einfachen Potenzgesetzes der kanonische Mittelwert der Steigung bei $\Gamma_{2-18\mathrm{keV}} = 1.73 \pm 0.15$. Mit der Hinzunahme der Reflexionskomponente wurden bessere Fits erzielt mit $\Gamma_{2-18\mathrm{keV}} = 1.95$ (Nandra & Pounds 1994). Einzig die hellste Seyfertgalaxie NGC 4151 weicht hinsichtlich ihrer Röntgeneigenschaften vom homogenen Bild ab (Abb. 5.4). Das Potenzgesetz dieser AGN variiert mit $\Gamma = 1.3 \ldots 1.8$ (Yaqoob et al. 1989). Der spektrale Fluß im Bereich von $2 - 18$ keV und die Härte der Röntgenemission scheinen reziprok korreliert. Man vermutet aufgrund der detektierten starken Absorption ($N_{\mathrm{H}} \propto 10^{23}\mathrm{cm}^{-2}$), daß NGC 4151 unter einem großen Inklinationswinkel betrachtet wird. Eine besondere Geometrie (sphärischer Scheibenwind, der thermischen Ursprungs ist und eine *intermediate line region* speist) läßt die Galaxie als Seyfert 1 Objekt erscheinen, was eine Modifikation, aber keinen Widerspruch zum Standardmodell bedeutet (Cassidy & Raine 1996).

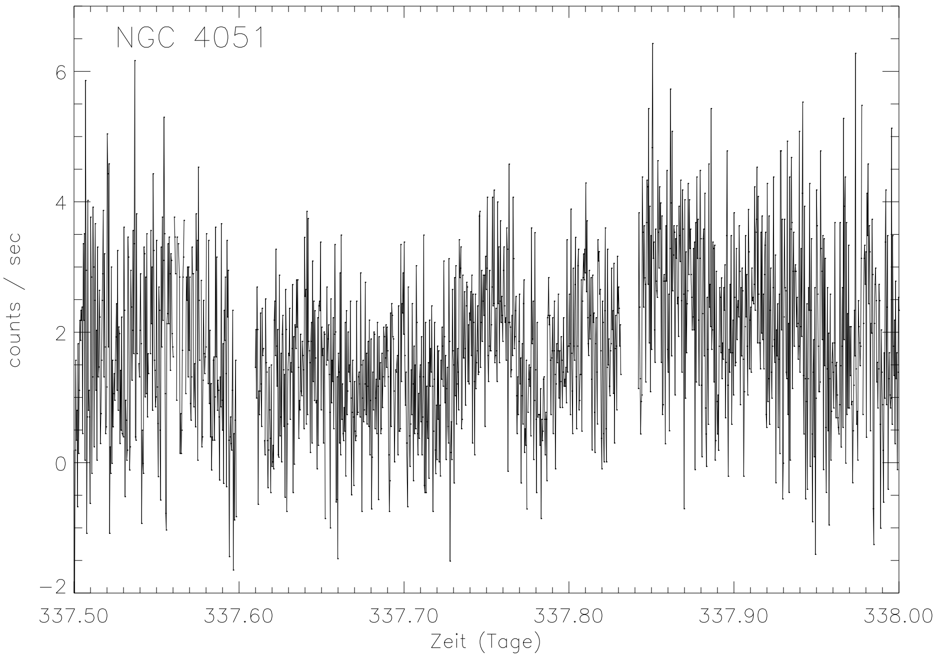


Abbildung 5.5: Röntgenlichtkurve der Seyfertgalaxie NGC 4051 (EXOSAT ME 1-9 keV, 30 s Bins, Dezember 1985, $T_{Ges} = 143$ ksec). Der hier gezeigte Ausschnitt aus der Gesamtbeobachtung umfaßt genau 12 Stunden. Das sichtbare Rauschniveau ist mit dem erwarteten Poisson Rauschen verträglich.

5.1.3 Zeitliche Variabilität Aktiver Galaxien

5.1.3.1 Motivation

Betrachtet man die zeitliche Abhängigkeit des Emissionsverhaltens von Aktiven Galaxien, so studiert man meist die zeitabhängigen Helligkeitsvariationen in bestimmten Spektralbändern oder etwa die Änderungen im Linienprofil von Spektrallinien. In diesem Zusammenhang sind vergleichende Untersuchungen von Helligkeitsvariationen in verschiedenen Energiebereichen interessant, da man aus den messbaren Laufzeitdifferenzen Rückschlüsse auf die Geometrie der Emissionsregionen ziehen kann (*reverberation mapping*, Bregman et al. 1988, Winkler et al. 1992, Kalinkov et al. 1993, O'Brien & Leighly 1997). Bei nahezu allen beobachtbaren Helligkeitsvariationen muß jedoch beachtet werden, daß es sich hierbei um mittelbare Reprozessierungslichtkurven der primären Strahlungsquelle handelt. Nur die Beobachtungen der Veränderungen der Röntgenhelligkeit einer Aktiven Galaxie lassen es zu, Aussagen über den Nahbereich des zentralen Schwarzen Loches zu treffen.

Handelt es sich bei der im Röntgenlicht beobachteten AGN um ein BL Lac

Objekt, ist Vorsicht geboten, da hier die beobachtete Jetemissivität die des Kernbereichs überdeckt. Im Zusammenhang mit der durch *jets* induzierten Variabilität soll auch die beobachtete periodische Aktivität der AGN OJ 287 erwähnt werden (Sillanpää et al. 1988). Diese für Aktive Galaxien ungewöhnlichen, streng periodischen Helligkeitsausbrüche im Bereich sichtbaren Lichts mit einer Periode von 11.7 Jahren (8.9 yr im Ruhesystem der Galaxie mit kosmologischer Rotverschiebung $z = 0.306$) entstehen vermutlich durch eine Präzessionsbewegung des *jets*, sind also nicht mit den irregulären AGN Langzeitvariationen auf Zeitskalen von Monaten bis Jahren korreliert (Katz 1997).

Die Favorisierung der Röntgenemission bei der Untersuchung der Zentrumsquelle in AGNs wird auch dadurch gestützt, daß die Röntgenemission die schnellsten zeitlichen Flußänderungen aufweist. So galt lange Zeit eine HEAO-2 Beobachtung der Seyfertgalaxie NGC 6814, bei der der Röntgenfluß (im Energiebereich von $0.1 - 2\,\mathrm{keV}$) in 250 sec um 70% zunahm, als kürzeste Änderungszeit (Tennant et al. 1981). Leider stellte sich heraus, daß gerade diese schnellste Flußänderung nicht auf die Aktive Galaxie, sondern auf eine in Sichtrichtung liegende galaktische Röntgenquelle zurückging (Madejski et al. 1993, Staubert et al. 1993). Die schnellsten Veränderungen, die man in den Röntgenlichtkurven Aktiver Galaxien[8] beobachtet, liegen im Bereich von ≈ 500 sec (McHardy 1985, König et al. 1997a). In Bezug auf die Amplitude der beobachteten Helligkeitsvariation im Röntgenlicht liegt der Rekord bei der *narrow line* Seyfert 1 Galaxie IRAS 13224-3809, die während einer ROSAT Beobachtung ihren Röntgenfluß während zwei Tagen um den Faktor 57 änderte (Boller et al. 1997). Es wird vermutet, daß in diesem Ausnahmefall diese dramatische Variabilität durch einen relativistischen Projektionseffekt in der Akkretionsscheibe um ein schnell rotierendes Schwarzes Loch verursacht wird.

Fragt man nach den Gründen der beobachteten Schwankungen in der Röntgenhelligkeit (s. Abb. 5.5), muß man die Zeitabhängigkeit der den Emissionsprozeß bestimmenden Parameter untersuchen. Die zentrale Energiequelle in AGNs speist sich aus der Umsetzung der mit der Akkretionsrate $\dot{M}$ aufgesammelten Materie, die beim Zustrom auf die Zentralmasse M mit der Effizienz η in Strahlungsenergie umgewandelt wird. Bei einem Emissionsradius $R = r_\mathrm{S}$ definiert man die Akkretionsleuchtkraft

$$\begin{aligned} L_\mathrm{acc} &= 2\,\eta\, M\, \frac{\dot{M}}{R} \\ &= \eta\, \dot{M} c^2 \quad . \end{aligned} \tag{5.5}$$

Wie bei Gl. 5.3 eingeführt, liegen typische Werte der Effizienz bei Akkretion

[8]Hier werden die mitunter noch schnelleren Variationen in BL Lac Lichtkurven nicht berücksichtigt, da diese vermutlich nicht auf Prozesse im Galaxienzentrum, sondern auf Vorgänge im *jet* zurückgehen Wagner & Witzel 1995.

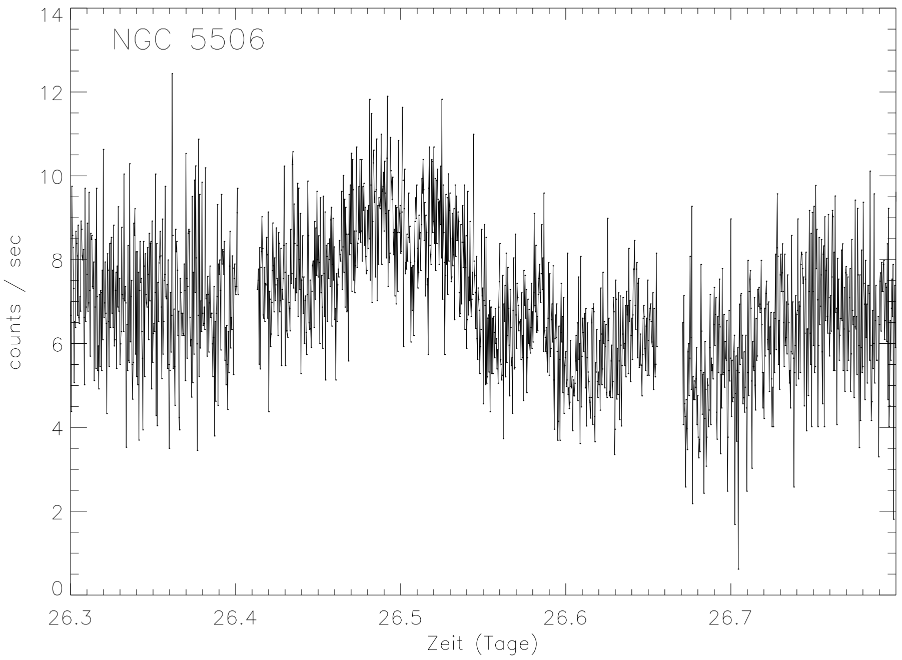


Abbildung 5.6: Röntgenlichtkurve der Seyfertgalaxie NGC 5506 (EXOSAT ME 1-9 keV, 30 sec Bins, Januar 1986, $T_{\rm Ges} = 225$ ksec).

auf ein Schwarzes Loch bei $\eta \approx 0.1$, d.h. ein Großteil der akkretierten Materie verschwindet ohne Energiefreisetzung hinter dem Ereignishorizont. Trotzdem stellt die Akkretion den wirksamsten Mechanismus zur Erzeugung von Energie dar, da z.B. bei der Kernfusion die Effizienz nur $\eta_{\rm H \rightarrow He} = 0.007$ beträgt. Beobachtet man also Veränderungen in der Leuchtkraft, so sind diese in einem ersten Ansatz auf Änderungen der Akkretionsrate $\dot{M}$ rückführbar.

Bei einer genauen Betrachtung ist diese Hypothese jedoch nicht haltbar, da die Akkretionsscheibe den Materiezustrom moderiert. Dies geschieht aufgrund der bei der Materiediffusion wichtigen Viskosität, die die mikroskopischen (mechanische und elektromagnetische) Wechselwirkungen des Scheibenmaterials beschreibt. Der Transportprozeß bewirkt eine Dissipation kinetischer Energie, was letztlich zur Aufheizung der Akkretionsscheibe führt. Man kann nun eine Zeitskala einführen, die die Zeit angibt, mit der die Scheibe auf radiale Veränderungen reagiert[9]. Für eine Kepler–Scheibe mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega_k = \sqrt{GM/R^3}$ ist diese *viskose Zeitskala*

$$t_{\rm visc} \propto \frac{R^2}{\nu} \propto \frac{R}{v_r} \tag{5.6}$$

[9] Diese Zeitskala entspricht der typischen Zeitskala, mit der ein Materiering mit Radius R durch die Wirkung viskoser Drehmomente *zerfließt*.

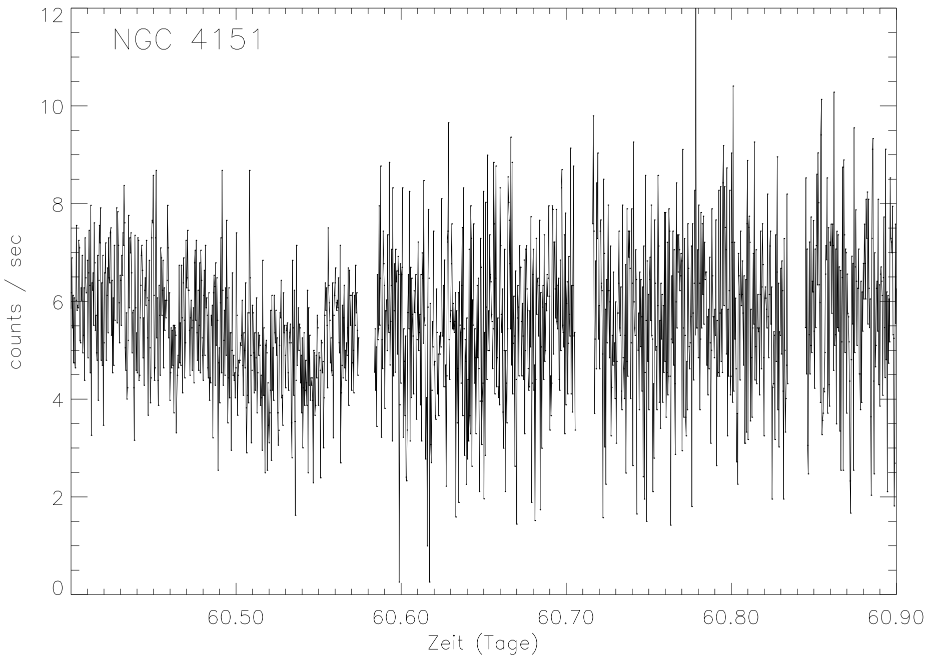


Abbildung 5.7: Röntgenlichtkurve der Seyfertgalaxie NGC 4151 (EXOSAT ME 1-9 keV, 30 sec Bins, März 1986, $T_{\rm Ges} = 94$ ksec).

$$\text{mit} \quad \text{Radialgeschwindigkeit} \quad v_r \propto \frac{\nu}{R} \quad . \tag{5.7}$$

Die Materiediffusion in der Scheibe wird durch den Koeffizienten der kinematischen Viskosität $\nu \approx \lambda_d \cdot c_s = \alpha_{\rm ss}\, H\, c_s$ quantifiziert, wobei λ_d die freie Weglänge der radialen Driftbewegung ($\lambda <$ als Scheibendicke H) und c_s die Schallgeschwindigkeit bezeichnen (Frank et al. 1992). Der Parameter $\alpha_{\rm ss}$ (< 1) wurde von Shakura und Sunyaev eingeführt und faßt alle Unwägbarkeiten hinsichtlich der viskosen Wechselwirkung in einer für die Akkretionsscheibe konstanten Größe zusammen. Störungen in azimuthaler Richtung (mit Geschwindigkeitskomponente v_Φ), wie sie etwa durch Inhomogenitäten in der Materiedichte (spontane Strahlungsausbrüche, sog. *flares* (Pudritz & Fahlman 1982)) auftreten, kompensiert die Akkretionsscheibe mit der *dynamischen Zeitskala*

$$t_{\rm dyn} \propto \frac{R}{v_\Phi} \propto \Omega_k^{-1} \quad . \tag{5.8}$$

Für ein AGN, deren Zentralmasse $10^6\, M_\odot$ und deren Akkretionsrate $\dot{M} = 1\, M_\odot$ pro Jahr beträgt, errechnet man mit $R \approx 3 - 5\, r_S$ einen Wert von 37 Tagen für die viskose Zeitskala[10] und eine deutlich kürzere dynamische Zeitskala von nur

[10] Für typische Akkretionsscheiben gilt $t_{\rm visc} \approx 6.5 \cdot 10^5\, \alpha_{\rm ss}^{-4/5} (M/10^6 M_\odot)^{3/2}\, (R/r_S)^{5/4}$ sec

etwa 5 Sekunden Länge. Bei größerer Zentralmasse nimmt $t_{\rm visc} \propto M^{5/4}$ zu und $t_{\rm dyn} \propto M^{-1}$ entsprechend ab.

Will man also die in den Röntgenlichtkurven beobachteten Leuchtkraftvariationen durch Veränderungen der zuströmenden Materiemenge erklären, so scheitert dies nicht nur durch die vergleichsweise viel zu große viskosen Zeitskala, sondern v.a. an der Glättungseigenschaft der materietransportierenden Akkretionsscheibe. Jede nach innen wandernde Störung der Flächendichte wird durch die radiale Diffusion moderiert und resultiert in einer auf Zeitskalen von Monaten konstanten Akkretionsrate in Aktiven Galaxien. Dieses Resultat findet in den beobachteten Langzeitvariationen der Röntgenhelligkeit (auf Zeitskalen von Monaten bis zu Jahren) gute Bestätigung (s. App. C, McHardy 1985, Mushotzky et al. 1993).

Die beobachteten schnellen Leuchtkraftvariationen der AGN Lichtkurven gehen somit nicht auf großflächige Veränderungen der Scheibenleuchtkraft zurück, sondern entstehen vermutlich durch Reprozessierung von spontanen Elementarereignissen, sog. *shots* (Lehto 1989). Mit Hilfe der Resultate aus Kap. 5.1.2 gelangt man somit zu einer möglichen Prozessbeschreibung, die sowohl die beobachteten Energiespektren wie auch die Kurzzeitvariabilität Aktiver Galaxien erklären kann: Durch Inhomogenitäten des Akkretionsstroms im innersten Bereich von $3 - 5\, r_s$ einer Akkretionsscheibe kommt es fortwährend zu einzelnen Strahlungsausbrüchen. Diese *shots* emittieren Energie im ultravioletten Spektralbereich und besitzen eine zeitliche Ausdehnung, die durch die dynamische Zeitskala bestimmt ist. Durch inverse Comptonisierung in einer heißen Elektronenkorona, die den Innenbereich des Schwarzen Loches umgibt, verlassen die zu anfang emittierten UV Photonen die Korona als Röntgenstrahlung. Durch die Statistik der Zeitverteilung der Compton–Streuprozesse in der Korona, sind die Austrittszeitpunkte der Röntgenphotonen zeitlich breit gefächert, sodaß ein Röntgenpuls im Vergleich zum auslösenden UV–Photonenpuls zeitlich gedehnt erscheint. Die beobachtete AGN Lichtkurve ergibt sich schließlich als Komposition aus vielen überlagerten Röntgenpulsen (s. App. 1.2, Haardt et al. 1997, König & Timmer 1997).

Diese hypothetische Beschreibung durch die zeitabhängige Comptonisierung läßt sich nun durch die Untersuchung der Variabilität in Röntgenlichtkurven auf Stimmigkeit überprüfen. Betrachtet man die hier gezeigten Lichtkurven des Verlaufs der Röntgenhelligkeit Aktiver Galaxien, so ist man immer versucht, die Unterschiede zwischen den Objekten an der markantesten Flußvariation festzumachen. Geht man nun davon aus, daß eine Veränderung der Akkretionsrate die lokale Leuchtkraft verändert und sich somit eine *Störung* mit maximal Lichtgeschwindigkeit über den Bereich der Emissionsregion ausbreiten kann (s. Abb. 5.8), so korreliert die sichtbare Veränderungszeit Δt mit der *maximalen* Größe des emittierenden Gebietes (Terell 1967). Pflanzt sich die Leuchtkraftänderung mit kleineren Geschwindigkeiten $v < c$ fort, so entspricht Δt ein entsprechend klei-

(Frank et al. 1992).

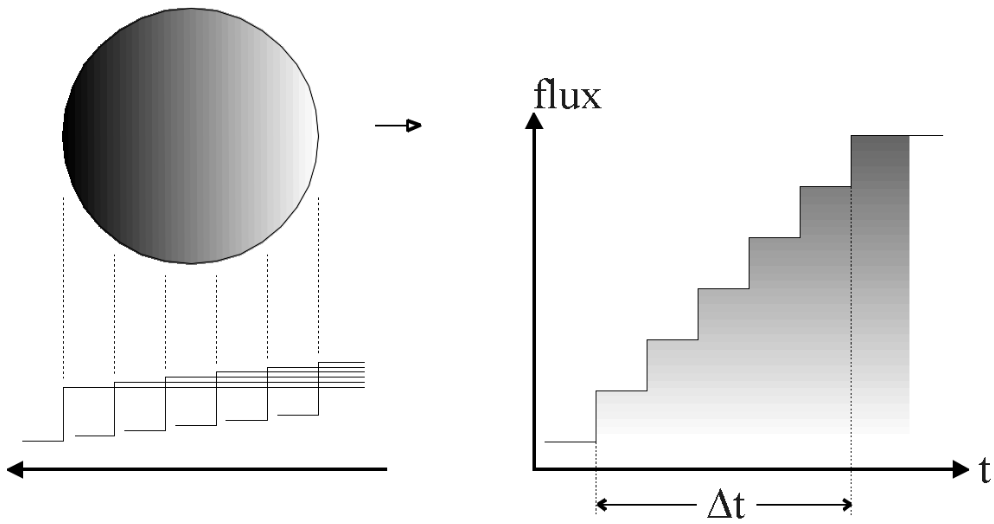


Abbildung 5.8: Zusammenhang zwischen Maximalgröße der flächenhaften Emissionsregion und der schnellsten beobachteten Variationszeitskala Δt. Der Graukeil simuliert (näherungsweise) im kreisförmigen Quellgebiet (links) die Ausbreitung der Leuchtkraftänderung. Durch die zeitliche Retardierung tragen daher verschiedene Quellbereiche zu verschiedenen Zeiten zur sichtbaren Flußvariation (rechts) bei.

neres Emissionsgebiet. Prinzipiell wäre es auch der Fall $v = 0$ denkbar, d.h. eine zeitabhängige Emission, die auf ein punktförmiges Gebiet beschränkt ist. Es hat sich (leider) eingebürgert, diese Variationszeitskalen Δt auf eine Flußänderung um den Faktor 2 zu normieren, indem man Δt entsprechend der beobachteten Änderung $\max\left(F(t+\Delta t)/F(t)\right)$ transformiert.

$$\Delta t_2 = \Delta t \, \frac{2}{\max\left(F(t+\Delta t)/F(t)\right)} \tag{5.9}$$

Diese künstliche Zeitskala Δt_2 wird dann (trotz Transformation) mit der Maximalgröße der flächenhaften Emissionsregion gleichgesetzt (Barr & Mushotzky 1986). Meist wird dadurch $\Delta t_2 < \Delta t$, d.h. die Maximalgröße wird unterschätzt und damit auch die *compactness* der Quelle überschätzt, was wiederum zu falschen Schlüssen in Bezug auf die Physik des Emissionsprozesses führen kann ($\ell > 1 \rightarrow$ mögliche Paarbildung).

5.1.3.2 Fourier-Techniken

Wie man sich an den hier gezeigten Lichtkurven (s. Abb. 5.5 – 5.7) leicht klarmacht, ist die vom Satelliten beobachtete *schnellste* Variation, auch davon abhängig, wann und wie lange beobachtet werden kann. Die schnellen Helligkeitsänderungen kommen selbst in langen Beobachtungen nicht sehr oft vor, wodurch die Gefahr besteht, daß zwei unterschiedliche Beobachtungen eines AGN zu zwei verschiedenen Variationszeitskalen führen. Um dies zu vermeiden, erscheint es sinnvoll, die Variabilität einer Aktiven Galaxie nicht auf *ein* Beobachtungsdetail zurückzuführen, sondern *alle* sichtbaren Variationszeitskalen in die Charakterisierung miteinfließen zu lassen. Dies geschah durch die Anwendung von Fourier-Techniken der Zeitreihenanalyse (McHardy 1985).

Durch die AGN Beobachtungen mit Hilfe des Röntgensatelliten EXOSAT wurde diese Möglichkeit der Datenauswertung interessant, da nun bis zu 64 Stunden lange, ununterbrochene Röntgenlichtkurven vorlagen. Durch die niedrigen Erdumlaufbahnen (*low Earth orbits*) der früheren Satelliten waren AGN Lichtkurven meist viel kürzer und aufgrund der Quellbedeckungen durch die Erde zerstückelt. Wie in Kap. 2.3.2 erläutert, bedingt dieses unterbrochene Sampling eine komplexe Windowfunktion und kann somit eine zuverlässige Analyse des Periodogramms unmöglich machen. Die durch den hoch-exzentrischen Orbit von EXOSAT gemessen Langzeitlichtkurven stellen einen (bis heute[11]) unerreichten Quantensprung im Bereich der AGN Variabilitätsforschung dar. Da die Lichtkurven von Aktiven Galaxien – ohne Ausnahme – irreguläre Variabilität aufweisen, ist das zugehörige Periodogramm eine kontinuierliche Funktion, wodurch eine Anwendung von *CLEAN*-Algorithmen (wie sie bei Analyse unterbrochener Beobachtungen periodischer Quellen benutzt werden) nicht möglich ist. Nur im Bereich von langen Zeitskalen im Bereich von Monaten können, durch geeignetes Binning, von der Windowfunktion kaum gestörte Periodogrammwerte berechnet werden (s. Kreuze in Abb. 5.9).

Das in Abb. 5.9 gezeigte Periodogramm wurde aus Periodogrammen aller verfügbaren Lichtkurven der Seyfertgalaxie NGC 5506 zusammengesetzt. Wie für AGN Periodogramme typisch, erkennt man eine Dreiteilung des Frequenzspektrums:

1. *Poisson level* Am hochfrequenten Ende des Periodogramms ($f > 10^{-3}$ Hz) erkennt man einen flachen Verlauf, der durch das Poisson Rauschen des Röntgendetektors dominiert ist. Dieser unkorrelierte Beitrag zur Lichtkurve bewirkt einen konstanten Anteil im Periodogramm ($P(f) \approx$ const.). Durch den verwendeten doppelt–logarithmischen Maßstab scheinen die mit $\mathrm{e}^{-\mathrm{P(f)}}$-verteilten Periodogrammpunkte (bei gleicher Ordinate) durch die Zunahme der dicht aufeinanderfolgenden Fourierfrequenzen weiter nach unten zu streuen.

2. *red noise* [12] Der Frequenzbereich zwischen 10^{-3} und 10^{-5} Hz wird oft als *dynamischer Bereich* bezeichnet, da hier die Beiträge zum Periodogramm

[11]Der für das Jahr 1999 geplante Röntgensatellit XMM der ESA soll wieder einen hoch-exzentrischen Orbit mit 45 Stunden Umlaufszeit erhalten.

[12]In der Literatur wird der Anstieg in Richtung niedrigerer Frequenzen in Analogie zum optischen Spektrum oft als *red noise* bezeichnet.

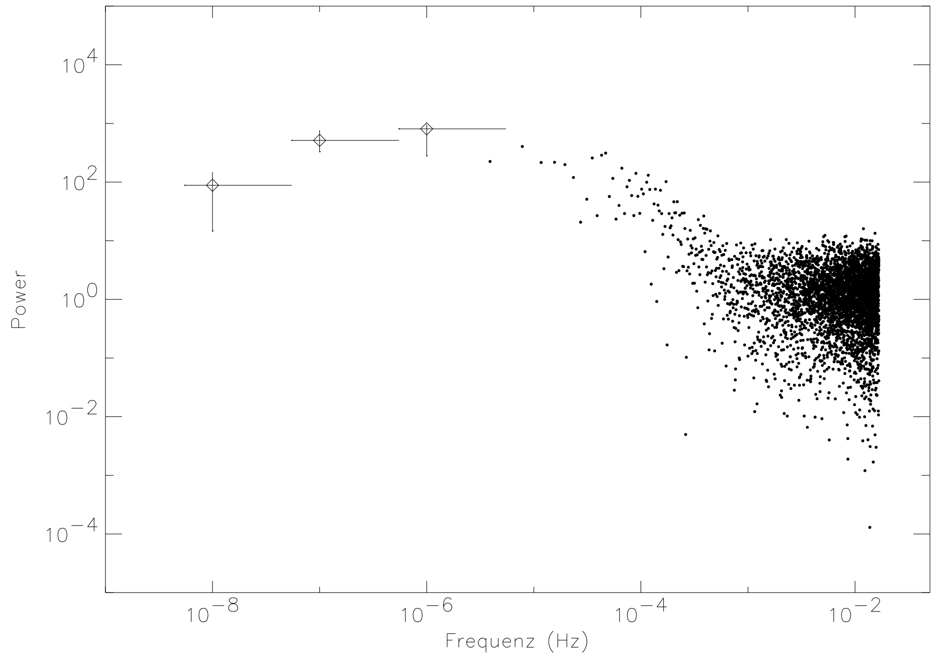


Abbildung 5.9: Periodogramm aller Röntgenbeobachtungen der Seyfertgalaxie NGC 5506 durch EXOSAT (1983–1986, $T_{\rm Ges} = 887$ Tage, $T_{\rm Ges,netto} = 3.82$ Tage, ME Energiebereich $1 - 9$ keV). Die Punkte zeigen das Periodogramm der längsten zusammenhängenden EXOSAT Beobachtung (s. Abb. 5.10). Die drei Kreuze markieren die mittleren Periodogrammwerte für Zeitskalen im Bereich von Monaten bis Jahren, deren Berechnung durch die Kombination verschiedener EXOSAT Beobachtungen möglich wurde.

in Richtung kleiner Frequenzen stark anwachsen. Diese Zeitskalen sind es auch, die die schon angesprochene, *mit dem Auge sichtbare Variabiltät* der Röntgenlichtkurven dominieren.

3. *flat top* Bei den längsten zum Periodogramm noch beitragenden Zeitskalen ($f < 10^{-6}$Hz) flacht die Verteilung wieder deutlich ab. Dieser Bereich ist bei kurzen AGN Beobachtungen nicht detektierbar.

Der annähernd lineare Verlauf der Periodogrammwerte in der doppelt–logarithmischen Darstellung im Mittelteil der Periodogramms führte zur Einführung der $1/f^\alpha$-Modellbeschreibung. Der Parameter α ist immer positiv schwankt dabei zwischen 0 und 2 (Lawrence & Papadakis 1993). Dieser morphologische Ansatz drückt sich in der Funktion

$$P(f) = A \cdot \frac{1}{f^\alpha} + 2\,\sigma_{\rm obs}^2 \qquad (5.10)$$

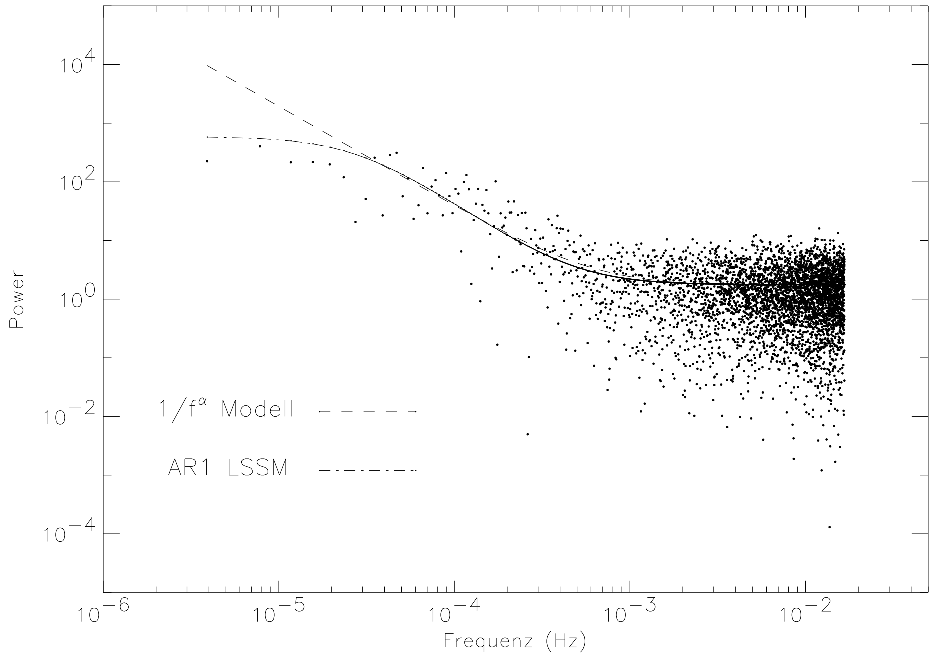


Abbildung 5.10: Periodogramm (Punkte) der Röntgenlichtkurve der Seyfertgalaxie NGC 5506 (Januar 1986, $T_{\text{Ges}} = 225$ ksec). Zusätzlich sind die Spektren des angepaßten $1/f^{\alpha}$– und des AR[1] Zustandsraummodelles dargestellt.

aus, wobei die zusätzliche Konstante $2\,\sigma^2_{\text{obs}}$ den Beitrag durch die Varianz des Beobachtungsrauschens beschreibt (s. *Poisson level*). Der Parameter A wird meist auf einen Frequenzwert $\approx 10^{-4}$ Hz bezogen (Papadakis & Lawrence 1995). Aus den Modellparametern wird ein Verteilungsmaß, die sog. *normalized variability amplitude* (nva), abgeleitet (mittlere Zählrate μ, Green et al. 1993).

$$nva \quad = \quad \frac{\sqrt{A^{\alpha}_{10^{-4}\text{Hz}}}}{\mu} \tag{5.11}$$

Diese Größe wurde eingeführt, da man einsehen mußte, daß *eine* Zeitskala (wie etwa Δt) bei selbstähnlichen Variationen[13] bedeutungslos ist (McHardy 1985, Green et al. 1993). In Kap. 5.2.3 wird an den Zeitreihen eines EXOSAT AGN Samples eine Fourieranalyse durchgeführt und die aus den Periodogrammen bestimmten Parameter mit physikalischen Kenngrößen der AGNs korreliert.

Die durch den dynamischen Anteil des Periodogramms motivierte $1/f^{\alpha}$ Beschreibung der AGN Variabilität stößt bei der Modellierung Periodogramme

[13]Selbstähnlichkeit bedeutet das gleichartige Erscheinungsbild der Zeitreihe (unabhängig vom verwendeten Binning) im Bereich von 10^3 bis 10^5 sec.

langer AGN Beobachtungen an Problemem (s. Abb. 5.10), da die beobachtete Abflachung für $f \rightarrow 0$ dem divergierenden Verlauf von $1/f^{\alpha}$ widerspricht. Das Integral A_P der Periodogrammverteilung $P(f)$ (bzw. $P(\lambda)$ mit $\lambda = f \cdot \Delta t_{\mathrm{bintime}}$) korrespondiert der gesamten Varianz der Lichtkurve (s. Kap. 2.3) und muß daher bei stationären Lichtkurven endlich sein.

$$
\begin{aligned}
A_P &= \int_0^{0.5} P(\lambda)\, d\lambda \quad \overset{\tilde{\lambda}=\ln(\lambda)}{\longrightarrow} \quad \left[\frac{1-\alpha}{\mathrm{e}^{\tilde{\lambda}\,(1-\alpha)}}\right]_{\rightarrow\infty}^{ln(\frac{1}{2})} \\
&\propto \frac{1}{1-\alpha}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha} - \lim_{\tilde{\lambda}\rightarrow\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{\tilde{\lambda}\,(1-\alpha)}}\right)
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

Der Ausdruck A_P divergiert für $\alpha \geq 1$ bei kleinen Frequenzen und ist nur für Werte $0 \leq \alpha < 1$ integrabel. Erfüllt eine Lichtkurve das Kriterium der Stationarität (s. Kap. 2.1), so führt eine Steigung $\alpha \geq 1$, die im zugehörigen Periodogramm gemessen wird, zu einem Widerspruch, da das angepasste Modell divergieren muß. Die Entfernungen der Werte der Lichtkurve vom Mittelwert müssten auf größer werdenden Zeitskalen immer weiter zunehmen. In Realität weichen die AGN Periodogramme (s. Abb. 5.10) im Bereich langer Zeitskalen deutlich vom $1/f^{\alpha}$ Modell ab. Wie schon bei der Einführung der stochastischen Prozesse in Kap. 3.1 diskutiert wurde, stellen daher AR Prozesse eine vielversprechende Alternative der Periodogrammbeschreibung[14] dar, da die zugehörigen Periodogramme dieser Klasse stochastischer Prozesse für $f \rightarrow 0$ abflachen (s. App. 1.1).

Da die Röntgenlichtkurven i.a. eine nicht zu unterschätzende Rauschkomponente aufweisen, kann eine AR Modellanpassung nicht direkt durchgeführt werden, sondern verlangt eine explizite Modellierung des Beobachtungsrauschens. Dies ist bei der der Anwendung eines Zustandsraummodelles (s. Kap. 4.2) gewährleistet. Im Rahmen dieser Dissertation wurden erstmals Röntgenlichtkurven Aktiver Galaxien mit dieser stochastischen Alternative zu traditionellen Fourieranalysemethoden untersucht (s. Kap. 2.3.2).

5.2 Das EXOSAT AGN Sample

5.2.1 Der Röntgensatellit EXOSAT

Das *European Space Agency's X-ray Observatory*, kurz mit EXOSAT bezeichnet, lieferte zwischen Mai 1983 und April 1986 erstmals Röntgenlichtkurven mit Beobachtungslängen von vielen Stunden. Dies war durch einen hochexzentrischen

[14]Andere Techniken, wie etwa die *Strukturfunktion* (Simonetti et al. 1985) oder die Berechnung der *frakatalen Länge* (McHardy & Czerny 1987) einer Zeitreihe, versuchen zwar auch die Verteilung der auftretenden Zeitskalen zu quantifizieren, lassen aber zum einen das Beobachtungsrauschen unberücksichtigt und erlauben desweiteren keine direkte physikalische Interpretation.

Orbit möglich, der EXOSAT mit bis zu 50 000 km Erdentfernung weit außerhalb der Strahlungsgürtel der Erde führte, wodurch Beobachtungszeiten von maximal 80 Stunden innerhalb des insgesamt 90 Stunden währenden Orbits ermöglicht wurden[15] (White & Peacock 1988).

Die Instrumentierung EXOSATs umschloß zwei abbildende Wolter–Röntgenteleskope (*low energy* Bereich (LE) 0.04−2 keV, je nach Filterwahl), einen Proportionalzählerarray (*medium energy* Bereich (ME) 1−20 und 5−50 keV), einen Gas-Szintillationszähler (GSPC, Energiebereich 2 − 40 keV) und ein Transmissionsgitter–Spektrograph (TGS).

Die in dieser Arbeit verwendeten Lichtkurven basieren ausschließlich auf Beobachtungen der EXOSAT ME Argon Proportionalzähler, die im Energiebereich von 1 − 20 keV eine effektive Fläche von $\approx$ 1500 cm^2 besaßen. Als Datenbasis der AGN Lichtkurven diente das EXOSAT ME Datenarchiv des *Laboratory for High Energy Astrophysics* (LHEA) des NASA *Goddard Space Flight Centers* (http://heasarc.gsfc.nasa.gov/W3Browse/exosat). Alle dort archivierten AGN Lichtkurven beziehen sich auf den Energiebereich von 0.9 − 8.9 keV und sind in 30 Sekunden langen Zeitbins aufgeführt. Lange, mehrstündige EXOSAT ME Beobachtungen sind typischerweise alle 11 ksec durch 15-minütige Lücken unterbrochen, da hier zwischen vier auf die Quelle ausgerichteten und vier den Hintergrund beobachtenden Detektoren gewechselt wurde. Mitunter weisen die Lichtkurven auch größere Lücken auf, wenn Meßdaten aufgrund instrumenteller Störungen abgelehnt werden mussten.

5.2.2 Auswahlkriterien für das AGN Sample

Für die Erstellung des EXOSAT Samples Aktiver Galaxien wurden nur solche stationären, d.h. trendlosen, Lichtkurven herangezogen, deren Gesamtbeobachtungszeit über 24 ksec und deren Netto–Beobachtungszeit über 80% lag. Da man aufgrund des starken Rauschniveaus bei mitunter sehr geringer Quellzählrate (s. Lichtkurven in Kap. 5.1.3), nicht alle in Frage kommenden langen EXOSAT Beobachtungen für die Variabilitätsstudie verwenden konnte, wurde in einem zweiten Schritt jede Lichtkurve auf *signifikante* Variabilität getestet. Hierzu wurde das Periodogramm der Lichtkurve einem Kolmogorov Smirnov Test auf Konstanz unterzogen und nur dann in das EXOSAT AGN Sample mit aufgenommen, wenn die Wahrscheinlichkeit für Weißes Rauschen unter 30% lag.

Von den insgesamt 422 AGN Beobachtungen[16], die EXOSAT durchgeführt hat,

[15] Die längste ununterbrochene Beobachtung einer Aktiven Galaxie dauerte 62.5 Stunden (s. Tab. 5.2).

[16] Insgesamt beobachtete EXOSAT 1780 Objekte, die von AGNs, Galaxienclustern, Kataklysmischen Veränderlichen, Weißen Zwergen, stellaren Koronae, Röntgendoppelsternen bis hin zu Supernovaüberresten reichten (http://heasarc.gsfc.nasa.gov/docs/heasarc/missions/-exosat.html).

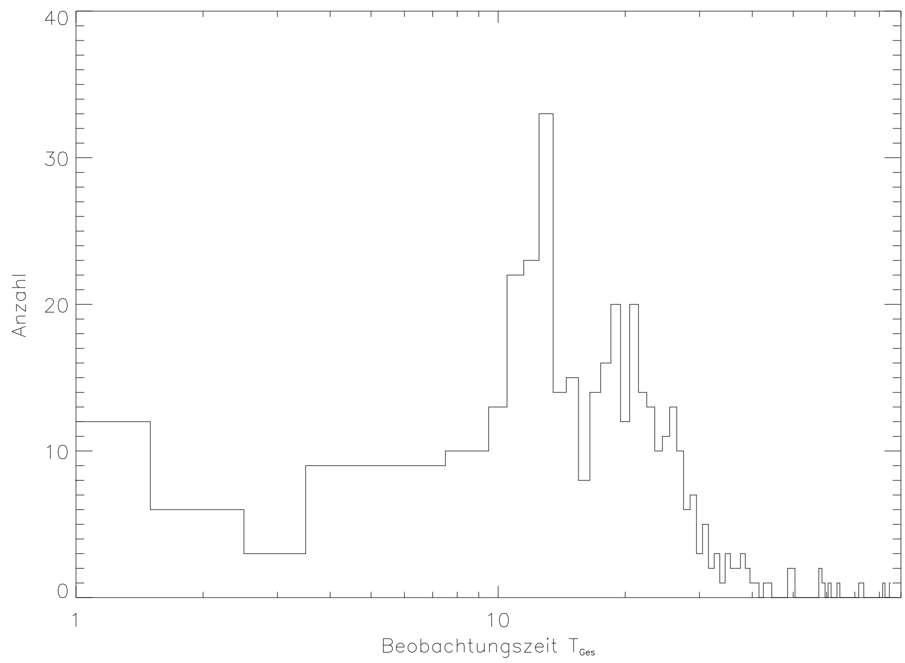


Abbildung 5.11: Häufigkeitsverteilung der AGN Beobachtungszeiten von Einzelbeobachtungen (HEASARC Archiv, Zeitangaben in ksec).

besitzen 105 eine Beobachtungslänge $T_{\rm Ges} > 24$ ksec (s. Abb. 5.11). Typischerweise liegen die Beobachtungszeiten im Bereich von 10^4sec, wobei deren Zahl mit steigender $T_{\rm Ges}$ schnell abnimmt und es z.B. für $T_{\rm Ges} > 36$ ksec nur noch 29 Einzelbeobachtungen gibt. In einigen Ausnahmefällen war es möglich, durch Kombination langer Beobachtungszeitreihen aus dem HEASARC Archiv, Zeitreihen zu generieren, die bzgl. ihrer Länge, die der ununterbrochenen Einzelbeobachtungen übertrafen. Aus der Vielzahl aller AGN Beobachtungen erfüllen die 24 in Tabelle 5.2 genannten Einzelbeobachtungen die gestellten Kriterien (s. App. 2.1). Die sich durch Kombination ergebenden sog. *long looks* ($T_{\rm Ges} > 10^5$sec), die sich in allen früheren Studien von EXOSAT AGN Beobachtungen finden, sind alle im generierten Sample enthalten (s. Green et al. 1993, Lawrence & Papadakis 1993). Das hier erstellte EXOSAT AGN Sample stellt in diesem Zusammenhang das größte Sample dar, das bisher für vergleichende Variabilitätsstudien im Zeit– und Frequenzraum benutzt wurde (s. Tab. 5.2).

5.2.3 Analyse im Frequenzraum

Für die Röntgenlichtkurven des EXOSAT AGN Samples wurde eine $1/f^{\alpha}$-Modellanpassung durchgeführt. Hierzu wurden die Periodogramme (s. Kap. 2.3) der EXOSAT ME Lichtkurven (mit 30 sec langen Zeitbins) errechnet und die Peri-

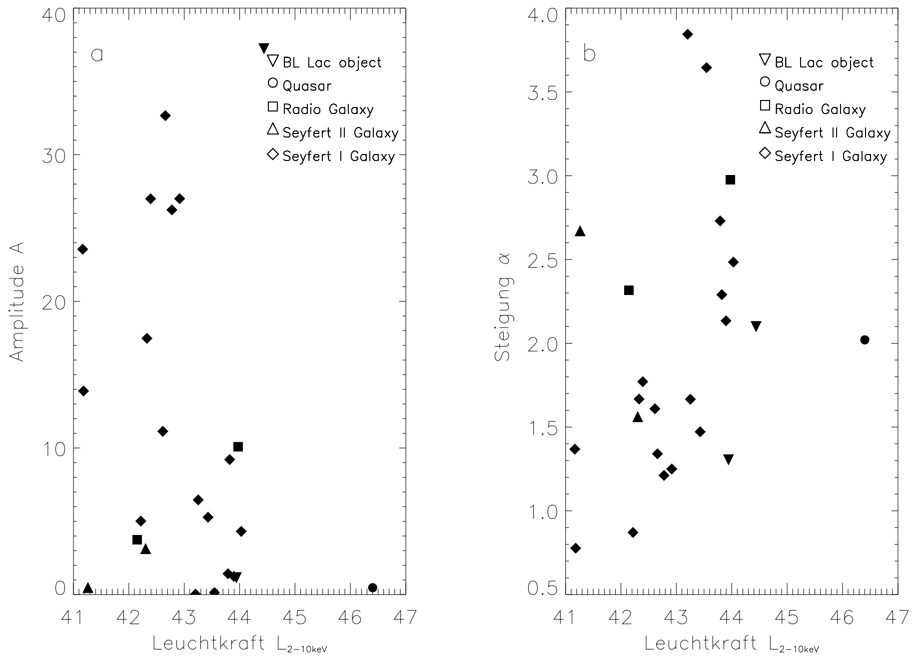


Abbildung 5.12: Korrelation der $1/f^{\alpha}$ Modellparameter (a) Amplitude A, b) Steigung α des Periodogramms) mit der Leuchtkraft der Beobachtungen des EXOSAT AGN Samples (Energiebereich $2-10$ keV, s. Tab. 5.4).

odogrammpunkte logarithmisch zusammengefaßt (s. App. 2.2). Dies geschah in Anlehnung an frühere Untersuchungen (Lawrence & Papadakis 1993) und dient zum einen dazu, die Statistik der Anpassung zu verbessern, da durch das Binning eine Rauschunterdrückung[17] bewirkt wird, und zum anderen werden die χ^2_2-verteilten Werte des Periodogramms hinreichend gut in Gaussverteilte Werte überführt, sodaß als Anpassungsprozedur ein Kleinste-Quadrate-Algorithmus verwendet werden kann (Timmer & König 1995).

[17]Es darf nicht vergessen werden, daß auch ein geglättetes Periodogramm nur eine Schätzung des wahren Spektrums liefert (s. Kap. 2.3).

Tabelle 5.2: Das EXOSAT AGN Sample

AGN	Typ	Beob. ttt/jj	T_{Ges} ksec	dc[b] %	KS_{Test}[c] %
3C 120	Sy 1	228/83	44.6	60.0	14.41
3C 120	Sy 1	276/84	44.5	80.0	$2.11 \cdot 10^{-5}$
3C 273	Q	17/86	145.2	89.5	0.08
3C 390.3	BLRG	33/85	30.3	92.7	0.05
Akn 120	Sy 1	24/85	23.9	95.5	0.04
Cen A	RG	44/84	44.2	98.6	$< 10^{-6}$
Fairall 9	Sy 1	286/83	30.6	90.1	21.14
IC 4329A	Sy 1	212/85	34.2	90.2	1.72
M 82	SBG	101/84	36.1	100.0	$< 10^{-6}$
MCG-6-30-15	Sy 1	28/86	183.7	90.1	$< 10^{-6}$
MR 2251	Q	279/83	91.6	90.6	4.20
Mrk 335	Sy 1	202/85	74.1	89.5	0.37
Mrk 335	Sy 1	335/85	28.1	90.8	$< 10^{-6}$
Mrk 421	BL Lac	338/84	26.6	93.1	$< 10^{-6}$
Mrk 501	BL Lac	74/86	91.3	73.0	21.73
Mrk 766	Sy 1.5	364/85	193.9	89.3	$< 10^{-6}$
NGC 1068	Sy 2	8/85	54.4	94.3	26.80
NGC 4051	Sy 1	99/84	34.3	99.5	$< 10^{-6}$
NGC 4051	Sy 1	337/85	143.8	92.3	$< 10^{-6}$
NGC 4151	Sy 1.5	192/83	86.7	87.1	$< 10^{-6}$
NGC 4151	Sy 1.5	27/85	94.5	86.1	$< 10^{-6}$
NGC 4593	Sy 1	176/85	32.5	93.9	1.93
NGC 4593	Sy 1	9/86	95.7	92.2	$< 10^{-6}$
NGC 5506	Sy 1.9	24/86	225.6	92.4	$< 10^{-6}$
NGC 5548	Sy 1.5	19/86	63.8	94.3	0.02
NGC 5548	Sy 1.5	62/86	85.9	93.6	$3.52 \cdot 10^{-3}$

[a]SBG – *star burst galaxy* (andere Abkürzungen s. Text), [b]*duty cycle* $= T_{netto}/T_{\mathrm{Ges}}$, [c]Kolmogorov Smirnov Test Wahrscheinlichkeit auf Weißes Rauschen.

Tabelle 5.3: $1/f^{\alpha}$-Modellanpassung an log. gebinnte Periodogramme

AGN	Beob. ttt/jj	$A_{10^4\mathrm{Hz}^{-1}}$ [a]	α [b]	$2\,\sigma^2_{\mathrm{obs}}$ [c]	χ^2_{red} / dof [d]
3C 120	228/83	1.25 ± 2.07	2.13 ± 1.39	2.58 ± 0.77	2.54/14
3C 120	276/84	4.31 ± 3.85	2.48 ± 0.88	2.20 ± 0.67	1.72/14
3C 273	17/86	0.47 ± 0.85	2.02 ± 0.90	3.00 ± 0.84	13.58/17
3C 390	33/85	10.07 ± 11.11	2.98 ± 1.33	6.69 ± 1.99	1.86/13
Akn 120	24/85	9.21 ± 7.43	2.29 ± 1.30	2.54 ± 0.84	2.11/12
Cen A	44/84	3.74 ± 4.17	2.32 ± 1.04	3.44 ± 1.05	2.21/14
Fairall 9	286/83	1.43 ± 2.48	2.73 ± 1.95	2.52 ± 0.74	1.64/13
IC 4329A	212/85	2.08 ± 2.88	3.49 ± 2.21	3.95 ± 1.14	1.83/13
M 82	101/84	0.00 ± 0.01	9.26 ± 4.50	2.14 ± 0.55	1.20/14
MCG-6-30-15	28/86	32.67 ± 13.45	1.34 ± 0.25	3.51 ± 1.47	1.71/18
MR 2251	279/83	0.53 ± 1.41	0.88 ± 1.76	2.51 ± 0.87	0.92/16
Mrk 335	202/85	0.03 ± 0.16	3.84 ± 2.78	2.90 ± 0.76	0.96/15
Mrk 335	335/85	6.46 ± 4.97	1.67 ± 0.98	2.79 ± 0.98	1.23/13
Mrk 421	338/84	37.35 ± 19.38	2.11 ± 0.70	3.96 ± 1.39	2.11/13
Mrk 501	74/86	1.28 ± 1.95	1.32 ± 0.94	2.96 ± 0.96	2.37/16
Mrk 766	364/85	27.01 ± 16.86	1.25 ± 0.35	11.13 ± 4.12	1.49/18
NGC 1068	8/85	0.37 ± 1.03	2.66 ± 2.15	2.42 ± 0.68	2.52/15
NGC 4051	99/84	23.56 ± 11.95	1.37 ± 0.61	3.70 ± 1.57	1.84/13
NGC 4051	337/85	13.89 ± 5.78	0.78 ± 0.27	1.86 ± 1.48	5.36/17
NGC 4151	192/83	17.48 ± 8.99	1.67 ± 0.41	3.10 ± 1.11	1.95/16
NGC 4151	27/85	27.00 ± 13.09	1.77 ± 0.39	3.65 ± 1.31	2.13/16
NGC 4593	176/85	5.01 ± 3.35	0.87 ± 0.76	2.01 ± 1.17	2.08/13
NGC 4593	9/86	11.14 ± 6.80	1.61 ± 0.46	3.42 ± 1.18	1.98/16
NGC 5506	24/86	26.24 ± 10.69	1.21 ± 0.25	3.02 ± 1.36	12.54/18
NGC 5548	19/86	5.28 ± 4.58	1.47 ± 0.60	4.00 ± 1.35	1.79/16
NGC 5548	62/86	0.14 ± 0.41	3.64 ± 1.79	3.68 ± 0.98	1.23/15

[a] Amplitude des $1/f^{-\alpha}$ Modells bei $f = 10^{-4}$Hz, [b] Steigung α im dynamischen Bereich, [c] Niveau des Beobachtungsrauschens, [d] Reduziertes χ^2 der Modellanpassung (dof = Anzahl der Freiheitsgrade).

Die in Tabelle 5.3 aufgelisteten Ergebnisse der $1/f^{\alpha}$-Modellfits an die Periodogramme der AGN Beobachtungen werden in Abb. 5.12 mit der AGN Leuchtkraft in Beziehung gesetzt. Man erkennt weder in der L-α– noch in der L-A–Darstellung eine signifikante Korrelation. Durch die große Anzahl der hier verwendeten AGN Beobachtungen kann man spekulieren, ob die in früheren Arbeiten (Lawrence & Papadakis 1993, Green et al. 1993, Pacholczyk & Stoeger 1994) gefundene Antikorrelation zwischen der Amplitude A (bzw. nva) und der Leuchtkraft der Aktiven Galaxie auf Auswahleffekte zurückzuführen ist. Speziell am Beispiel der Beobachtung des Quasars 3C 273 konnte gezeigt werden, daß durch Einflüsse der Windowfunktion das Periodogramm starke Modulationen im Bereich von 11 ksec (Detektorwechsel) und 72 ksec (größter zusammenhängender Teil der Beobachtung) auftreten, wodurch – je nach angewandten Binning des Frequenzspektrums – vollkommen verschiedene Modellparameter ermittelt werden (König & Timmer 1997). So ermittelte Green et al. (1993) die Steigung $\alpha = 2.48 \pm 0.79$, bei Lawrence & Papadakis (1993) wird $\alpha = 0.59 \pm 0.61$ angegeben und bei Pacholczyk & Stoeger (1994) wird die 3C 273 Beobachtung als nicht-variabel klassifiziert. Da zudem die 3C 273 Beobachtung aufgrund der höchsten Leuchtkraft eine exponierte Stellung besitzt, sind die Einflüsse dieser Mehrdeutigkeit der Modellparameter in Bezug auf eine Korrelation der Daten immens. Die starke Beobachterabhängigkeit der Analyseergebnisse macht deutlich, daß bei Untersuchung im Frequenzraum zu viele störende Einflüsse existieren, die sich nicht kompensieren lassen. Um eine objektivere Beurteilung der Variabilität der Röntgenlichtkurven Aktiver Galaxien zu erreichen, ist es daher sinnvoll, im Zeitraum der Beobachtungsreihe (auffaltungsfrei) nach Charakteristika der irregulären Variationen zu suchen.

5.2.4 Analyse im Zeitraum

Da aus der Fourieranalyse keine Rückschlüsse auf die Natur der Emissionsprozesses gewonnen werden konnten, wurde versucht, durch einen Vergleich der Variabilitätsstrukturen in Lichtkurven verschiedener Energiebänder den Prozeß zu enträtseln. Hierzu benutzte man die Daten der EXOSAT LE Röntgenlichtkurven ($0.05 - 2\,\mathrm{keV}$) und korrelierte sie mit den EXOSAT ME Lichtkurven ($1 - 9\,\mathrm{keV}$) (Lawrence & Papadakis 1993). Die errechnete Kreuzkorrelation enthielt keinen Hinweis auf das Vorhandensein einer zeitlichen Differenz, eines *time lags*, der Variationen in den zwei Energiebändern (s. Abb. 5.13).

Diese Studien im Zeitraum lieferten, zusammen mit schon bekannten Abhängigkeiten im Energiespektrum Aktiver Galaxien, erstmals Hinweise auf die Funktionsweise des der Variabilität zugrundeliegenden Emissionsprozesses:

- *softness effect* Nimmt die Röntgenhelligkeit einer Aktiven Galaxie zu, so kann gezeigt werden, daß die Zunahme der Zählrate energieabhängig erfolgt. Der Anstieg der LE-Zählrate lag bei EXOSAT Beobachtungen immer etwa

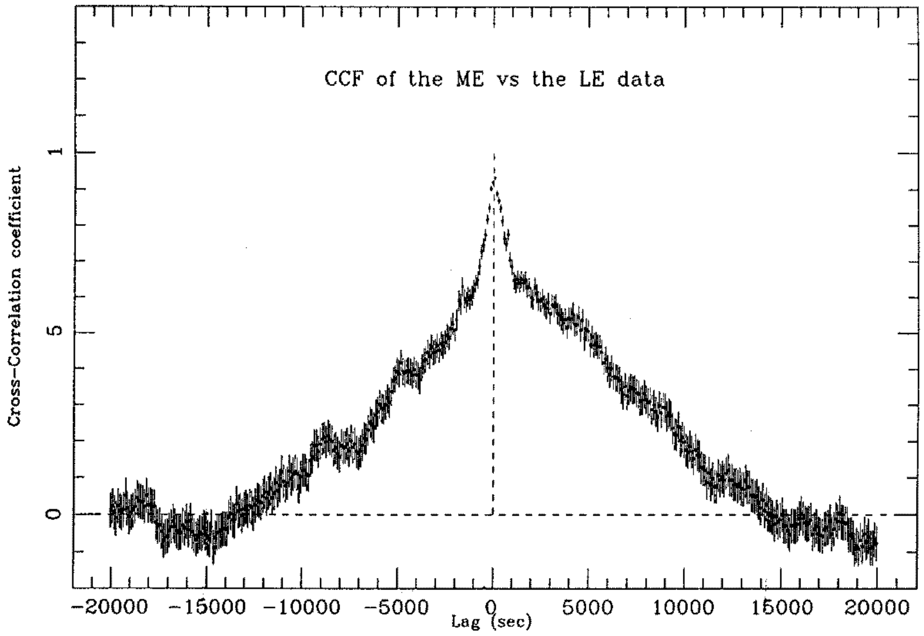


Abbildung 5.13: Kreuzkorrelation der ME - LE Zeitreihen (NGC 4051, 337/1985). Positive *time lags* beschreiben ein Vorauslaufen der LE- vor den ME-Strukturen (Lawrence *et al.* 1995).

30% über dem ME-Zuwachs (Analoges gilt für die Flußabnahme, Lawrence et al. 1985).

- *leading soft variations* Für *time lags* über 1000 sec zeigen Kreuzkorrelationen der ME- und LE-Lichtkurven deutliche Asymmetrien in der Verteilungsfunktion (s. Abb. 5.13). Dies deutet an, daß LE Strukturen, obwohl zwar phasenkohärent mit ME-Strukturen, zeitlich dennoch schneller als diese zerfallen. Es fällt auf, daß die zeitliche Ausdehnung der Strukturen in Lichtkurven höherer Energie, die der Strukturen in Lichtkurven niederer Energien übertrifft.

Diese Ergebnisse, die an einer detaillierten Untersuchung der EXOSAT Beobachtung der Seyfertgalaxie NGC 4051 durchgeführt wurden, konnten durch Beobachtungen anderer Aktiver Galaxien durch den Röntgensatelliten Ginga bestätigt werden (Matsuoka et al. 1990). Die physikalische Erklärung der beobachteten Variabilitätsmerkmale lieferten thermische Comptonisierungsmodelle (Lawrence et al. 1985). Demnach werden primär ausgelöste UV-Photonenflares durch Comptonisierungsstöße in einer heißen Korona in den harten Röntgenbereich gestreut und erscheinen durch die Statistik der Compton–Wechselwirkungen zeitlich verschmiert.

> *As with the softness effect, the asymmetry in the ME-LE cross–correlation suggests that the ME is a smoothed version of the LE ... According to thermal Compton scattering models, the X-ray photons are those which spent more time in the scattering medium ... the resulting ME burst is expected to be delayed and to decay slower in comparison to the LE burst (Papadakis & Lawrence 1995).*

Ein zusätzliches Argument für weitere Untersuchungen im Zeitraum lieferten überraschenderweise Fourier-Phasenspektren langer EXOSAT Beobachtungen (Krolik et al. 1993). Es stellte sich heraus, daß die Phasen von Real- und Imaginärteil der Fouriertransformierten der EXOSAT Zeitreihen über den gesamten dynamischen Frequenzbereich ($10^{-3} \dots 10^{-5}$Hz) gleichverteilt sind, d.h. es existiert keine signifikante Phasenkohärenz in den Röntgenlichtkurven. Diese Eigenschaft ist typisch für stochastische Prozesse[18], deren kontinuierliche Frequenzspektren (s. Kap. 3.1) (abgesehen von quasiperiodischen Phänomenen) selbstähnlich strukturiert sind, d.h. keine bestimmte Frequenz ausgezeichnet ist (Timmer & König 1995).

Eine Anpassung von stochastischen Prozessen an die beobachteten Röntgenlichtkurven kann zwar prinzipiell auch im Frequenzraum erfolgen, jedoch ist es empfehlenswert, im Zeitraum zu arbeiten, da hier keine Artefakte eine Anpassung beeinträchtigen (König & Timmer 1997). Der einzige Nachteil liegt im starken Beobachtungsrauschen der EXOSAT Röntgenlichtkurven. Daher benutzt man zur Modellanpassung die in Kap. 4.2 diskutierte Technik eines Linearen Zustandsraummodelles, bei der versucht wird, einen AR[p] Prozeß *unter* dem Beobachtungsrauschen zu schätzen. Bei der Beispiellichtkurve, die in Kap. 4.2 erfolgreich durch einen AR[1] Prozeß beschrieben werden konnte (s. Abb. 4.1), handelte es sich um die Röntgenlichtkurve der Aktiven Galaxie NGC 5506 (s. Tab. 5.2). Wie sich zeigte, läßt sich die Dynamik der Lichtkurven des EXOSAT AGN Samples völlig ausreichend mit einem AR[1] Prozeß modellieren. Zwar treten bei Modellbeschreibungen höherer Ordnung noch zusätzliche Relaxatoren und gedämpfte Oszillatoren auf, jedoch sind diese, im Vergleich zur dominierenden AR[1] Relaxationszeit, vernachlässigbar. Wie beim diskutierten Beispiel verwendet man als Qualitätsmerkmal der AR[1] Modellanpassung die Unkorreliertheit der Residuenzeitreihe. Die Residuen ergeben sich als Differenz aus der gemessenen und der geschätzten Lichtkurve (s. Gl. 4.26). Ein Kolmogorov–Smirnov Test auf Weißes Rauschen quantifiziert die Güte der Anpassung (s. Tab. 5.4). Die Residualvarianz der Zeitreihe $y(t) - \mathsf{C}\vec{x}(t)$ ändert sich nur beim Wechsel von Modellordnung $p = 0$ zu $p = 1$ signifikant, bei komplexeren Modellfits, d.h. bei Ordnungen $p > 1$, bleibt sie annähernd konstant. Somit kann man sagen, daß die gesamte, in der Zeitreihe

[18]Die Gleichverteilung der Phasen besteht genaugenommen auch für chaotische Prozesse. Wie in Kap. 4.2.2 jedoch gezeigt werden konnte, liefern diese keine zufriedenstellende Beschreibung der AGN Lichkurvendynamik.

präsente Dynamik durch einen Autoregressiven Prozeß 1. Ordnung *vollständig* beschrieben wird. Durch den bestimmenden Modellparameter a_1, d.h. durch die Relaxationszeit τ ist daher ein Maß gefunden worden, die sichtbare Variabilität der Röntgenlichtkurven Aktiver Galaxien konsistent und nahezu unbeeinflusst durch Beobachtungseinflüsse zu quantifizieren.

Wie aus der Theorie stochastischer Prozesse bekannt ist (s. Kap. 3.1), kann man die exponentiell zerfallende Autokorrelationsfunktion eines AR[1] Prozesses durch Zeitreihen generieren, die sich aus einer gleichförmigen, stochastischen Überlagerung gleichartiger $\mathrm{e}^{-t/\tau}$-*shots* ergeben[19]. Man kann zeigen, daß eine *shot noise* Zeitreihe ein Periodogramm besitzt, dessen Steigung im dynamischen Frequenzbereich immer $\alpha_{\mathrm{sn}} = 2$ beträgt (s. App. 1.2, Lehto 1989). Da man nun in den Periodogrammen Aktiver Galaxien Steigungen $\alpha = 0 \ldots 2$ beobachtet, versucht man dieses Dilemma[20] durch die Einführung neuer Freiheitsgrade zu lösen. Oft wird eine Verteilung der *shot* Zeitskalen in einem Bereich $\tau_1 \ldots \tau_2$ verwandt, um den dynamischen Abschnitt des Periodogramms näherungsweise zu modellieren.

> *In attempting model fits with τ_1 and τ_2 both free, we found the best-fitting value of τ_2 was essentially unconstrained. ... in order to remove a degree of freedom, we therefore fixed τ_2 arbitrarily at 12 000 sec (Papadakis & Lawrence 1995).*

Das modifizierte *shot noise* Modell enthält viele ad–hoc Annahmen und benutzt bei der Anpassung einen Taschenspielertrick, da eine Verteilung von Relaxationszeiten ein Periodogrammverlauf bedingt, der sich als Mischung aus einer $1/f$– und einer $1/f^2$–Verteilung beschreiben läßt. Zwar beschreibt man mit dem Modell in etwa den groben Verlauf des Periodogramms, die abgeleiteten Parameter besitzen jedoch kaum Aussagekraft. Für die EXOSAT Beobachtung der Seyfertgalaxie NGC 4051 wurde mit Hilfe des modifizierten *shot noise* Modells eine Zerfallszeitskala von $\tau_1 \approx 400$ sec ermittelt. Da das *shot noise* Modell als Spezialfall einer AR[1] Prozessbeschreibung gedeutet werden kann, liegt es nahe, diesen Wert mit dem aus der AR[1] LSSM Bestimmung zu vergleichen. Die Relaxationszeit $\tau = 2380$ sec ist deutlich größer als die Zeitskala τ_1 und zeigt hierdurch die Wirksamkeit des LSSMs. Erst durch das explizite Erfassen des Beobachtungsrauschens $\eta(t)$ gelingt eine Beschreibung der Systemdynamik. Wird $\eta(t)$ nicht berücksichtigt, werden die Modellparameter unterschätzt, da $\eta(t)$ als zusätzliche Rauschkomponente Korrelationen der Zeitreihe zerstört. Bei den langen Zerfallszeiten eines AR[1] Prozesses zeigt sich dies in einem Zerfall der Korrelationsfunktion, noch bevor der Puls selbst vollständig relaxiert ist. Das LSSM

---

[19] Dieses *shot noise* Szenario wird u.a. schon seit Jahrzehnten in der Elektrotechnik angewandt, um das typische Rauschen analoger elektrischer Bauelemente zu erklären (s. Press 1978).

[20] Im Gegensatz zum Frequenzraum sind im Zeitraum AR und *shot noise* Zeitreihen kaum zu unterscheiden. Obwohl die Prozessphilosopien andere sind, benutzt man diese Ähnlichkeit bei der Simulation der AGN Zeitreihen (s. Kap. 5.3.2).

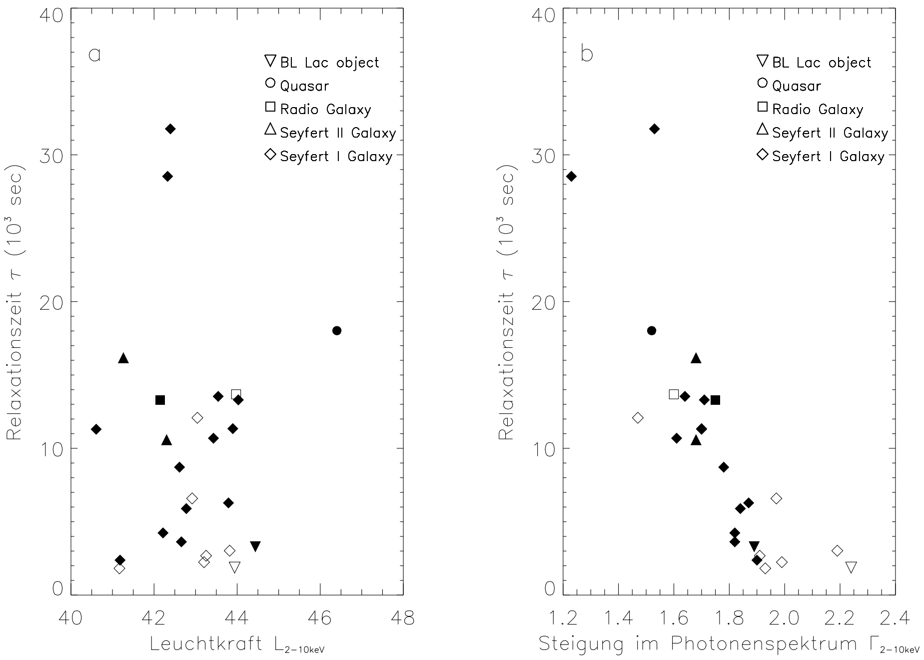


Abbildung 5.14: Korrelation der Relaxationszeit der LSSM Anpassung mit der a) Leuchtkraft und b) Photonenindex der Beobachtungen des EXOSAT AGN Samples (Energiebereich $2-10$ keV, s. Tab. 5.4). Ausgefüllte Symbole markieren AR LSSM Fits mit einer $\mathrm{KS_{Test}}$ Wahrscheinlichkeit $> 70\%$ für zeitlich unkorrelierte Residuen.

stellt in seiner Verallgemeinerung und in seiner Modellanpassung im Zeitraum eine vielversprechende Alternative zu *shot noise* Modellen dar.

Der in Tab. 5.4 für jede Beobachtung des EXOSAT AGN Samples angegebene Parameter $\Gamma_{2-10\mathrm{keV}}$ wurde der Literatur entnommen (s. Legende v. Tab. 5.4)[21]. Diese Größe beschreibt die Steigung eines Potenzgesetzes (Fluß $\propto E^{-\Gamma}$), das den Verlauf des Spektrums gut widergibt. Konnte das Photonenspektrum nicht ausreichend durch ein einfaches Potenzgesetz modelliert werden, wurden komplexere Beschreibungen verwendet (*soft excess*, Emissionslinien, Compton *reflection hump*, s. Kap. 5.1.2). Konnte desweiteren die Modellanpassung der EXOSAT ME Daten durch Hinzunahme der LE Daten verbessert werden, wurden die spektralen Parameter der besseren Beschreibung verwendet (Turner & Pounds 1989,Walter & Courvoisier 1992, Malaguti et al. 1994, Sambruna et al. 1994).

[21]Der Parameter Γ wird ugs. auch als *spektrale Härte* des Energiespektrums bezeichnet. Ein kleiner Wert für Γ beschreibt ein flaches – *hartes* – Energiespektrum mit verhältnismäßig vielen beitragenden hochenergetischen Röntgenphotonen, v.v.

Tabelle 5.4: LSSM Modellanpassung

AGN	*Beob.* ttt/jj	$L_{2-10\mathrm{keV}}{}^{a}$ erg/s	τ^{b} ksec	$KS_{\mathrm{Test}}{}^{c}$	$\Gamma_{2-10\mathrm{keV}}{}^{d}$	$\chi^{2}_{\mathrm{red}}{}^{e}$
3C 120 †	228/83	43.896	$11.34^{+4.34}_{-2.46}$	84.9	$1.70^{+0.04}_{-0.04}$	0.74
3C 120	276/84	44.029	$13.30^{+6.38}_{-3.26}$	97.0	$1.71^{+0.03}_{-0.02}$	1.39
3C 273	17/86	46.402	$18.02^{+6.85}_{-3.89}$	98.4	$1.52^{+0.02}_{-0.02}$	0.90
3C 390	33/85	43.975	$13.69^{+6.82}_{-3.42}$	44.2	$1.60^{+0.11}_{-0.12}$	0.71
Akn 120	24/85	43.821	$3.02^{+1.33}_{-0.71}$	60.6	$2.19^{+0.08}_{-0.08}$	1.20
Cen A	44/84	42.147	$13.29^{+6.37}_{-3.26}$	94.4	$1.75^{+0.08}_{-0.08}$	-
Fairall 9 †	286/83	43.791	$6.28^{+2.75}_{-1.47}$	83.6	$1.87^{+0.10}_{-0.10}$	-
M 82	101/84	40.608	$11.30^{+4.30}_{-2.44}$	96.4	$1.70^{+0.60}_{-0.30}$	0.40
MCG6-30-15	28/86	42.659	$3.63^{+1.98}_{-0.95}$	76.0	$1.82^{+0.14}_{-0.10}$	0.98
Mkn 335	202/85	43.204	$2.24^{+0.96}_{-0.52}$	48.7	$1.99^{+0.11}_{-0.11}$	1.01
Mkn 335	335/85	43.253	$2.68^{+1.66}_{-0.74}$	66.7	$1.91^{+0.22}_{-0.21}$	0.56
Mkn 421	338/84	44.439	$3.41^{+1.41}_{-0.77}$	98.0	$1.89^{+0.13}_{-0.09}$	1.19
Mkn 501	74/86	43.941	$2.00^{+1.50}_{-0.60}$	41.7	$2.24^{+0.02}_{-0.03}$	1.36
Mkn 766	364/85	42.917	$6.59^{+3.13}_{-1.61}$	35.3	$1.97^{+0.04}_{-0.04}$	1.19
NGC 1068 †	8/85	41.262	$16.05^{+5.09}_{-3.12}$	83.1	$1.68^{+0.07}_{-0.05}$	0.99
NGC 2992	96/84	42.303	$10.47^{+4.10}_{-2.30}$	72.8	$1.68^{+0.43}_{-0.28}$	1.31
NGC 3783	53/85	43.044	$12.08^{+5.02}_{-2.74}$	43.5	$1.47^{+0.04}_{-0.05}$	0.60
NGC 4051	337/85	41.182	$2.38^{+1.38}_{-0.64}$	81.2	$1.90^{+0.04}_{-0.04}$	1.01
NGC 4051	99/84	41.167	$1.82^{+1.16}_{-0.51}$	29.7	$1.93^{+0.13}_{-0.14}$	0.74
NGC 4151	192/83	42.327	$28.54^{+16.90}_{-7.74}$	75.0	$1.23^{+0.11}_{-0.11}$	0.95
NGC 4151	27/85	42.393	$31.77^{+22.33}_{-9.29}$	90.7	$1.53^{+0.11}_{-0.10}$	1.47
NGC 4593	176/85	42.217	$4.24^{+1.60}_{-0.91}$	93.5	$1.82^{+0.05}_{-0.04}$	0.83
NGC 4593	9/86	42.613	$8.72^{+4.69}_{-2.26}$	80.1	$1.78^{+0.05}_{-0.05}$	1.93
NGC 5506	24/86	42.777	$5.89^{+2.88}_{-1.46}$	99.8	$1.84^{+0.04}_{-0.04}$	-
NGC 5548	19/86	43.545	$13.54^{+6.75}_{-3.38}$	95.9	$1.64^{+0.03}_{-0.03}$	1.42
NGC 5548	62/86	43.430	$10.69^{+4.43}_{-2.42}$	85.8	$1.61^{+0.03}_{-0.03}$	1.28

[a]Leuchtkraft im Energiebereich 2 – 10 keV ($\log_{10}$ in erg/s, Malaguti et al. 1994 und darin enthaltene Referenzen), [b]AR[1/2] LSSM Relaxationszeit, † Hier gelang keine AR[1] Modellierung, erst ab AR[p>1] wurde die Dynamik ausreichend erfasst (trotz AR[2] dominiert *ein* Relaxator die LSSM Anpassung). Alle drei markierten Beobachtungen zeigen ein schwaches Signal/Rauschverhältnis (s. Tab. 5.2), was die Schwierigkeiten der AR[1] Anpassung erklärt, [c]Kolmogorov–Smirnov Test auf unkorrelierte Residuen, [d]Steigung des Potenzgesetzes im Photonenspektrum (s. Text), [e]reduzierter χ^2 Wert der Modellanpassung im Photonenspektrum.

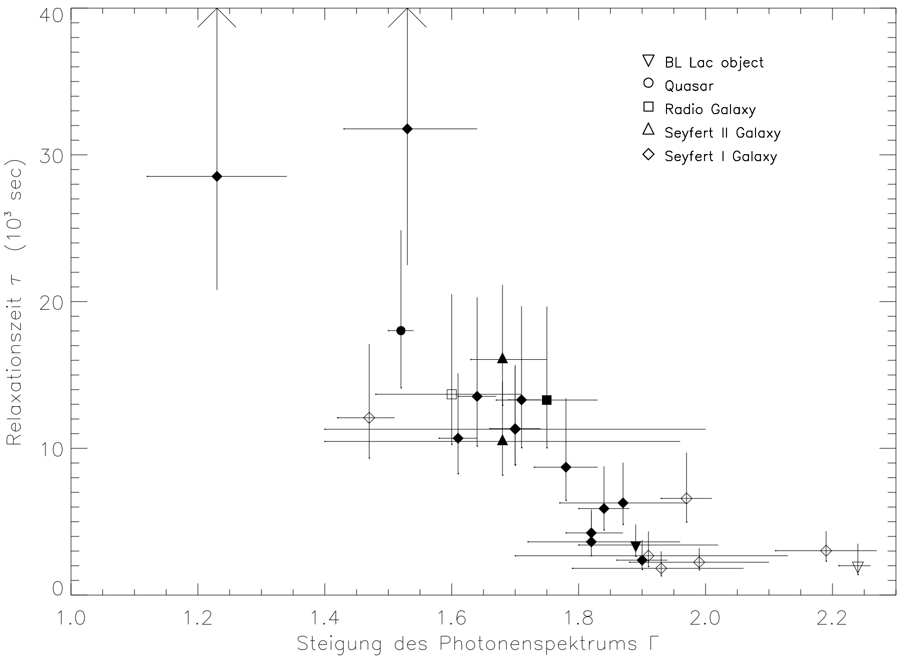


Abbildung 5.15: Korrelation der Relaxationszeit τ der LSSM Anpassung mit dem Photonenindex Γ der Beobachtungen des EXOSAT AGN Samples (Energiebereich $2-10$ keV, s. Tab. 5.4). Ausgefüllte Symbole markieren AR LSSM Fits mit einer $\mathrm{KS}_{\mathrm{Test}}$ Wahrscheinlichkeit $> 70\%$ für zeitlich unkorrelierte Residuen.

Das Potenzgesetz bleibt jedoch die den spektralen Verlauf im Energiebereich von $2-10$ keV dominierende Komponente ($\overline{\Gamma}_{\mathrm{Sample}} = 1.76 \pm 0.23$). Wie man in Abb. 5.14 erkennt, sind Leuchtkraft und Relaxationszeit voneinander unabhängig verteilt, wohingegen die Relaxationszeit deutlich mit der Steigung Γ des Photonenspektrums korreliert[22].

Mit Hilfe der für AR Prozesse durchgeführten theoretischen Untersuchungen und Simulationen zur Bestimmung der Fehlergrenzen der LSSM Parameter, kann man die 1–σ Fehler der Modellfits abschätzen (s. Tab. 5.4). Trotz der großen Fehler der Γ-Bestimmung aus den Photonenspektren folgt doch der Schluß, daß es sich bei der gefundenen Γ-τ Beziehung um einen signifikanten Zusammenhang handelt (s. Abb. 5.15).

Benutzt man zur näheren Untersuchung der Korrelation, die Mitglieder des EXOSAT Samples, deren LSSM Anpassung eine $\mathrm{KS}_{\mathrm{Test}}$ Wahrscheinlichkeit von $>70\%$ für unkorrelierte Residuen liefert, so findet man einen Korrelationskoeffizienten von -0.827. Der nicht-parametrische *Kendalls tau* Test (s. Press et al.

[22]Aus der Unabhängigkeit der Relaxationszeit von der AGN–Leuchtkraft L läßt sich mit Hilfe von Gl. 5.6 eine interessante Folgerung ableiten: Wg. $L \propto \dot{M}$ ist die Relaxationszeit, und damit die Dynamik der Röntgenlichtkurven, *nicht* mit der Akkretionsrate $\dot{M}$ korreliert.

1992) liefert einen Korrelationsparameter von -0.745, was einer Wahrscheinlichkeit von $5.73 \cdot 10^{-5}$ für unkorrelierte Daten entspricht. Eine Modellanpassung einer linearen Funktion liefert $\tau_{\rm lin} = (85.86 \pm 10.63) - \Gamma \cdot (43.34 \pm 6.20)$ ksec, berücksichtigt man die auch die Fehler bei der Anpassung, erhält man $\tau_{\rm lin,\sigma} = (80.54 \pm 41.98) - \Gamma \cdot (41.08 \pm 30.97)$ ksec. Nimmt man auch Werte schlechterer[23] AR LSSM Fits hinzu, wird die Korrelation nicht verletzt, da es keine Ausreißer gibt. Durch die systematisch kleinen Fehler in τ bei kleinen Relaxationszeiten würde dann jedoch eine deutliche Verflachung des linearen Zusammenhangs auftreten. Zudem erscheint es aufgrund der Beobachtungsgeometrie fraglich, ob sich schnell-variable BL Lac Objekte (im Bereich kleiner Werte für τ und weichen Spektren, d.h. für $\Gamma \approx 2$) überhaupt in die für AGN scheinbar typische Γ-τ Relation einordnen lassen (s. Kap. 5.1.1).

5.3 Bewertung und Diskussion der Ergebnisse

5.3.1 Erklärungsmodell zur Γ-τ Relation

Der gefundene Zusammenhang zwischen der spektralen Härte des Photonenspektrums und der Variabilitätszeitskala des stochastischen Prozesses erlaubt nun, Rückschlüsse auf die Physik des Röntgenemissionsprozesses in Aktiven Galaxien zu ziehen (König et al. 1997c). Die Γ-τ Relation läßt sich wie folgt verbalisieren: Besitzt eine Aktive Galaxie ein *weiches* Photonenspektrum, so zeigt sie in der Regel *schnelle* Variationen in ihrer Röntgenlichtkurve, da die zugehörige Relaxationszeit des die Dynamik beschreibenden AR[1] Prozesses *kurz* ist. Die schnellste Variabilität, d.h. die kleinsten Werte für τ liegen hierbei im Bereich von $\lessapprox 1$ Stunde. Analog schließt man auf *lange* Relaxationszeiten im Falle von *harten* Photonenspektren. Die größten Werte für τ, die für die AGNs des EXOSAT Samples bestimmt wurden, lagen bei ≈ 10 Stunden.

Hier ist anzumerken, daß man nicht sicher sein kann, mit diesen Maximalwerten für τ auch eine obere Grenze möglicher Relaxationszeiten bestimmt zu haben. Wie in Kap. 5.2 erläutert, wurden AGN Röntgenlichtkurven, die einen Trend enthielten, aus Gründen der Stationarität nicht in das EXOSAT Sample mit aufgenommen. Dieses Kriterium galt zwar unabhängig von den jeweiligen spektralen Eigenschaften, wirkte sich aber doch nachteilig für AGN mit langen Relaxationszeiten aus, da es verständlicherweise nur wenige, extrem lange AGN Beobachtungen durch EXOSAT gab. Da EXOSAT nun gleichermaßen AGNs mit hartem und weichen Spektrum beobachtet hat, führte dies unvermeidbar zur

[23] Im üblichen Verständnis eines Hypothesentests mit einem Signifikanzniveau von 5 - 10% stellen alle AR[1] Fits gelungene Modellbeschreibungen dar. Bei der Auswertung der LSSM–AR[1] Simulationen (s. Kap. 4.2.1) hat es sich jedoch gezeigt, daß die $KS_{\rm Test}$ Wahrscheinlichkeit abnimmt, wenn das Verhältnis $T_{\rm Ges}/\tau$ verkleinert wird.

Ausdünnung des Samples im Bereich großer Relaxationszeiten, bzw. harten Photonenspektren. Da die Photonenspektren Aktiver Galaxien im Röntgenbereich typischerweise immer $\Gamma > 1$ erfüllen (s. Tab. 5.4), erscheint dennoch die Folgerung plausibel, daß die längsten Zeitskalen der Kurzzeitvariabilität von ≈ 10 Stunden eine natürliche Obergrenze definieren[24].

Für den Bereich kleiner τ Werte, kann man davon ausgehen, ebenso eine physikalische Grenze des Emissionsprozesses erreicht zu haben, da es im Prinzip möglich wäre, noch kürzere Relaxationszeiten zu messen[25].

Wie schon in Kap. 5.2.4 diskutiert wurde, ist Comptonisierung ein favorisiertes Erklärungsmodell der Röntgenemission Aktiver Galaxien. Dieser physikalische Ansatz benutzt die Streuung von Photonen an freien Elektronen und die damit verbundene sich ändernde Energiebilanz des Photons, um das *energetische* Erscheinungsbild der Aktiven Galaxien zu erklären. Ein erfolgreiche Prozessbeschreibung muß natürlich auch die beobachteten *zeitlichen* Emissionscharakeristika beinhalten. Hierbei muß man zwischen dem Wirken der Comptonisierung bei der Reprozessierung von Primärstrahlung[26] und dem Comptonisierungsschritt bei der Entstehtung der primären Strahlungskomponente unterscheiden. Die diskutierte Kurzzeitvariabilität der Röntgenhelligkeit Aktiver Galaxien ist auf die Zeitabhängigkeit bei der Entstehung der Primärstrahlung zurückzuführen (s. Kap. 5.1.3, Mushotzky et al. 1993).

Am Anfang dieser inversen Comptonisierung stehen UV– und weiche Röntgenphotonen, die im innersten Bereich der Akkretionsscheibe gebildet werden. Der genaue Entstehungsmechanismus dieser, zeitlich durch die dynamische Zeitskala der Akkretion (s. Gl. 5.8) bestimmten, Initialereignisse liegt noch im Dunkeln[27]. Vermutlich spielen aber hierbei (lokale) Magnetfelder in der Akkretionsscheibe eine große Rolle, da im akkretierten Plasma, ähnlich den Protuberanzen in der Sonnenatmosphäre, magnetische Rekonnexion spontan Energie freisetzen kann, die im UV- oder im Bereich weicher Röntgenstrahlung emittiert wird. Interessanterweise liefert dieser Ansatz neben magnetisch induzierten Initialereignissen auch noch eine, den Innenbereich der Akkretionsscheibe umgebende heiße Elek-

[24]Folgt man der, aus der Theorie stochastischer Prozesse abgeleiteten Faustformel $T_{\rm Ges}/\tau \geq 5$, so müßte ein Röntgensatellit, der die AGN Kurzzeitvariabilität untersuchen soll, eine minimale Orbitlänge von 50 Stunden aufweisen.

[25]Die EXOSAT Röntgenlichtkurven des HEASARC Archives lagen in 30 sec Zeitbins vor, d.h. $\tau_{\rm min} = 2000$ sec ≈ 70 Bins. Simulationen (s. Kap. 3.5) haben gezeigt, daß man AR[1] Modellparameter bis $\tau \gtrsim 5$ Zeitbins sicher bestimmen kann. Prinzipiell meßbar wären minimale Relaxationszeiten von ≈ 150 sec.

[26]Energiereiche, d.h. harte Primärstrahlung wird an der kalten, optisch dicken Akkretionsscheibe zu 90% absorbiert und als weiche Strahlung wieder abgestrahlt. Da die Photoabsorption (dominiert für Energien < 10 keV über Compton-Streuung) aber mit E^{-3} für weichere Photonen zunimmt, verlassen diese kaum mehr die Scheibe. Man beobachtet daher den *Compton–Buckel* im Bereich von 10-40 keV.

[27]Eine beliebte Formulierung ist in diesem Zusammenhang "*accretion flow inhomogeneities*", die aber sehr unverbindlich und uneinheitlich verwendet wird.

tronenkorona (Balbus & Hawley 1991). Im turbulenten Innenbereich der Akkretionsscheibe kann der magnetische Druck lokal den Gas- und Strahlungsdruck übertreffen, wodurch Instabilitäten entstehen, die als Plasmablasen entlang der durch lokale Magnetfelder definierten Grenzschicht aufsteigen. Durch die Turbulenz, die sich auf immer kleinere Längenskalen auswirkt, wird magnetische Feldenergie in kinetische Energie transferiert, was schließlich eine Aufheizung der Scheibenkorona bewirkt (Elektronentemperatur $T_{\mathrm{e,AGN}} \approx 150$ keV, s. Haardt & Maraschi 1991). Durch thermische Comptonisierung in der heißen Korona werden die weichen Initialphotonen in harte Röntgenphotonen überführt und man erhält das bekannte Potenzgesetz im harten Röntgenspektrum mit einem exponentiellen Abfall wie es etwa für Seyfert Galaxien typisch ist (Di Matteo et al. 1997, Haardt et al. 1997).

Der Prozeß der Comptonisierung wird neben der Elektronentemperatur T_{e} durch den Parameter

$$y = \frac{4\,k\,T_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{e}}\,c^2}\max(\tau_{\mathrm{o}}, \tau_{\mathrm{o}}^2) \quad , \tag{5.13}$$

bestimmt. Durch den großen Energiegewinn der Photonen beim ersten Compton-Stoß, ergibt sich eine weitgehende Unabhängigkeit von der Anfangsenergie der Photonen (Kazanas et al. 1997). Die optische Tiefe $\tau_{\mathrm{o}} = n_{\mathrm{e}}\,\sigma_{\mathrm{T}}\,R$ enthält die Elektronendichte n_{e}, den Thomson–Streuquerschnitt σ_{T} und die Größe der Streuregion R. Der Parameter y beschreibt die gesamte Energieänderung der Initialphotonen durch die thermische Comptonisierung (Wilms 1996). Neben diesen physikalischen Randbedingungen ist natürlich auch die Quellgeometrie entscheidend, da diese die Aufenthaltsdauer der Photonen in der Korona und somit auch die Stärke der Comptonstreuung bestimmt.

Die empirische Γ-τ Relation verbindet nun die spektralen und zeitlichen Eigenschaften des vermuteten Comptonisierungsprozesses. Gelingt es, in einem Modell einer zeitabhängigen thermischen Comptonisierung diesen Zusammenhang zu reproduzieren, kann man die gefundene Korrelation zur Eichung der prozeßrelevanten Größen benutzen.

5.3.2 Simulationen zur Comptonisierung

Für die Simulation eines zeitabhängigen Comptonisierungsprozesses wird ein Programm benutzt, das zur Beschreibung der Röntgenenergiespektren galaktischer Schwarzlochkandidaten entwickelt wurde (Nowak & Vaughan 1996, Wilms 1996, Nowak et al. 1997). Der verwendete nichtlineare Monte-Carlo Ansatz modelliert die Wechselwirkungsprozesse zwischen Photonen, Elektronen und Positronen wie sie in eine Akkretionsscheibenkorona (Temperatur T_{e}, optische Tiefe τ_{o}) auftreten. Ausgangspunkt ist dabei eine große Anzahl von monoenergetischen UV–Photonen ($E_{\mathrm{UV}} = 10$ eV), die alle zeitgleich in der aktiven Comptonisierungsregion emittiert

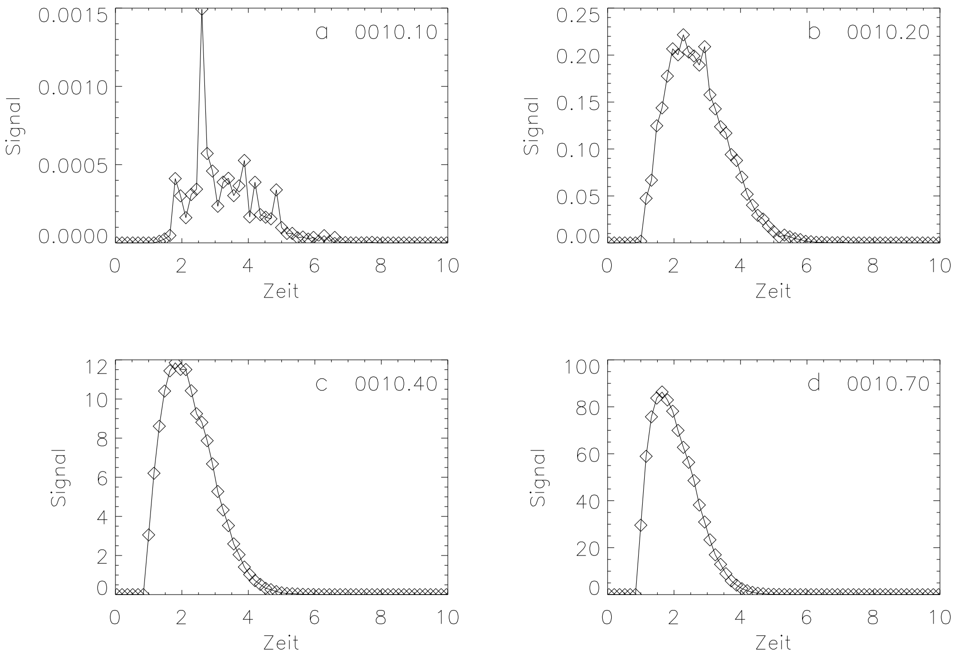


Abbildung 5.16: Simulierte Comptonisierungspulse für eine sphärische Korona. a) $\tau_o = 0.1, T_e = 0.1 \cdot m_e c^2 \approx 51$ keV, b) $\tau_o = 0.1, T_e = 0.2 \cdot m_e c^2 \approx 102$ keV, c) $\tau_o = 0.1$, $T_e = 0.4 \cdot m_e c^2 \approx 204$ keV, d) $\tau_o = 0.1$, $T_e = 0.7 \cdot m_e c^2 \approx 358$ keV ($E_{UV} = 10$ eV, $N_{init} = 8 \cdot 10^5$). Die Signalstärke beschreibt die Austrittswahrscheinlichkeit der comptonisierten Photonen im Energiebereich $2 - 9$ keV, die Zeitachse ist auf die Lichtlaufzeit für den Koronaradius normiert.

werden[28]. Durch die Energie– und Winkelabhängigkeit des Wirkungsquerschnittes, wie auch durch mögliche Rückkopplungen gestreuter Photonen, ergibt sich eine Verteilung der Initialphotonen in Energie und Zeit. Das von der Korona abgestrahlte Spektrum, wie auch die zeitliche Abfolge zeitlich gedehnter und spektral gehärteter Comptonpulse einer Großzahl von Initialereignissen ($N_{init} = 8 \cdot 10^5$) hängt neben τ_o und T_e auch empfindlich von der Koronageometrie, d.h. der räumlichen T_e–Temperaturverteilung ab.

Für das einfachste Bild einer UV–Photonenquelle im Zentrum einer sphärischen Korona der Temperatur T_e ergeben sich Pulsformen, die durch eine schnellen Anstieg und nahezu exponentiellen Abfall der Emissionswahrscheinlichkeit gekennzeichnet sind (s. Abb. 5.16). Hält man die optische Tiefe konstant und erhöht die Koronatemperatur, so nimmt mit T_e die Zahl der emittierten Röntgenphotonen stark zu (s. Abb. a–d), da der zunehmende Energiegewinn pro Comptonstoß mehr Photonen in den Röntgenbereich streut. Diese Zunahme an harten Rönt-

[28] Der Zeitverlauf der freigesetzten UV–Photonen läßt sich somit als Folge von *Deltapeaks* beschreiben ($\rightarrow$ Punktprozeß).

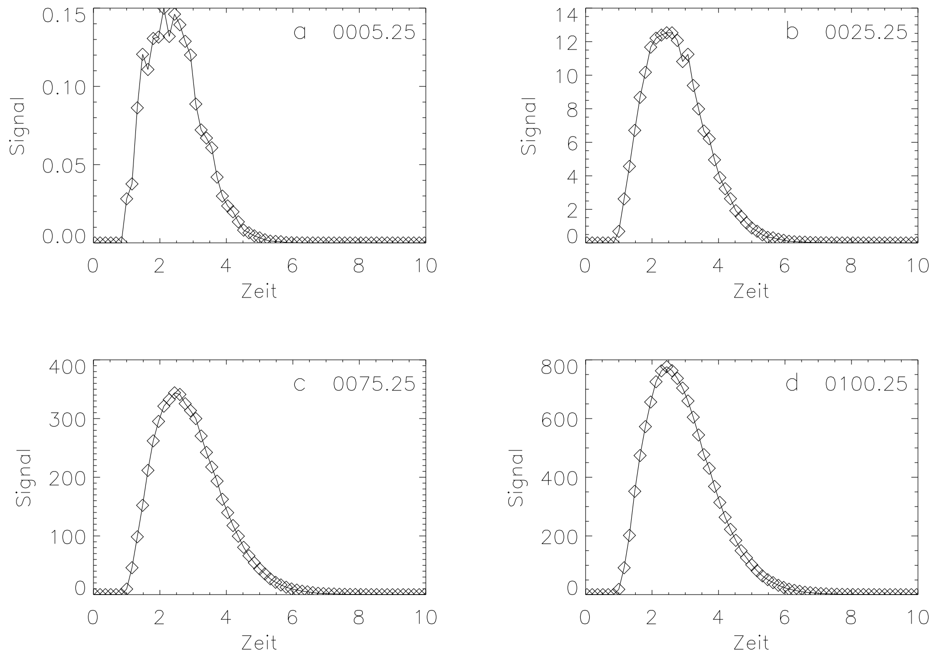


Abbildung 5.17: Simulierte Comptonisierungspulse für eine sphärische Korona. a) $\tau_o = 0.05$, $T_e = 0.25 \cdot m_e c^2 \approx 128$ keV, b) $\tau_o = 0.25$, $T_e \approx 128$ keV, c) $\tau_o = 0.75$, $T_e \approx 128$ keV, d) $\tau_o = 1.0$, $T_e \approx 128$ keV ($E_{UV} = 10$ eV, $N_{init} = 8 \cdot 10^5$). Die Signalstärke beschreibt die Austrittswahrscheinlichkeit der comptonisierten Photonen im Energiebereich 2 – 9 keV, die Zeitachse ist auf die Lichtlaufzeit für den Koronaradius normiert.

genphotonen beeinflußt die Verteilung der Photonen im Energiespektrum in der Art, daß ein angepaßtes Potenzgesetz immer flacher, d.h. immer härter wird.

Eine Erhöhung der Austrittswahrscheinlichkeit für comptonisierte Röntgenphotonen ergibt sich auch bei einer Vergrößerung der optische Tiefe der Korona. Schon die hier verwendete einfache Kugelgeometrie läßt erkennen, daß sich mit einer Veränderung von τ_o auch das zeitliche Erscheinungsbild der Comptonpulse ändert. Die simulierten Pulse in Abb. 5.17 zerfallen bei geringen optischen Tiefen schneller. Dies erscheint plausibel, da mit einem größeren Wert für τ_o ($\rightarrow$ kleinere freie Weglänge) auch eine größere Zahl von Wechselwirkungsprozessen verbunden ist. Die Photonen verbleiben *länger* in der Korona, wodurch die Verteilung der Austrittszeitpunkte gedehnt wird, was sich schließlich an der *größeren* Relaxationszeit der Comptonpulse zeigt.

Die Comptonisierung in einer Akkretionsscheibenkorona liefert demnach mit zunehmender Härte der emittierten Photonen auch einen Anstieg der Relaxationszeiten der Comptonpulse. Dies ist eine qualitative Bestätigung des empirischen Γ-τ–Zusammenhangs, der sich aus der Untersuchung des EXOSAT AGN Samples

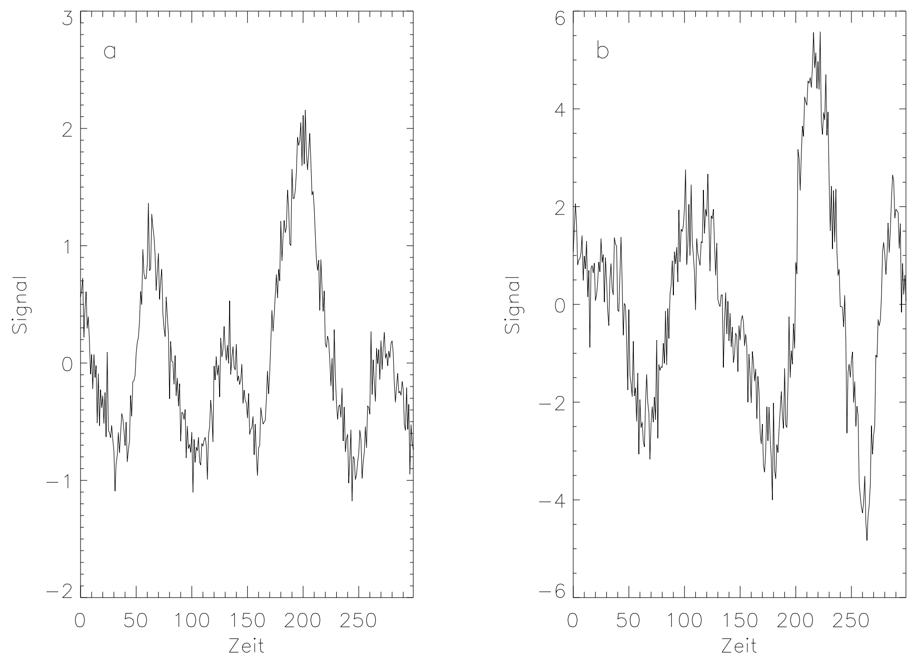


Abbildung 5.18: Simulierte *shot noise* Zeitreihen mit mittleren Pulsrate von a) 4 Pulsen und b) 40 Pulsen in 100 Zeiteinheiten. Als Basis diente in beiden Zeitreihen der simulierte Compton-Puls (sphärische Geometrie) mit $\tau_o = 1.0$ und $kT = 128$ keV.

ergab (s. Kap. 5.2.4).

Die in den Simulationen erzeugten Comptonpulse kann man nun ihrerseits als Initialereignisse eines *shot noise* Prozesses (s. Anh. 1.2) verwenden, um eine Röntgenlichtkurve zu generieren. Diese simulierten Zeitreihen werden anschließend durch Anwendung der LSSM Methodik, analog zum Vorgehen bei den EXOSAT AGN Röntgenlichtkurven, untersucht.

Wie aus der Theorie der *shot noise* Prozesse bekannt ist, hängt dabei das dynamische Erscheinungsbild der Zeitreihe, und daher auch die Verteilungsfunktion des zugehörigen Periodogramms nicht von der Impulsrate der Poisson–verteilten Comptonpulse ab. Die Impulsrate definiert das Niveau der Amplituden der Zeitreihe und somit auch deren Varianz (s. Abb. 5.18, s. Anh. 1.2). Weiter folgt, daß die Dynamik *nicht* von der Impulsrate abhängt, was in der festgestellten Unabhängigkeit von AGN Leuchtkraft und gemessener Relaxationszeit Ausdruck findet (s. Abb. 5.15). Mit Hilfe der durchgeführten Simulationen erschließt sich somit die prinzipielle Möglichkeit, aus dem Vergleich der Reihenvarianzen zweier Lichtkurven, das zugehörige Verhältnis der mittleren Impulsraten zu bestimmen (König & Timmer 1997).

Aus der Gegenüberstellung in Abb. 5.18 erkennt man, daß der zentrale Parame-

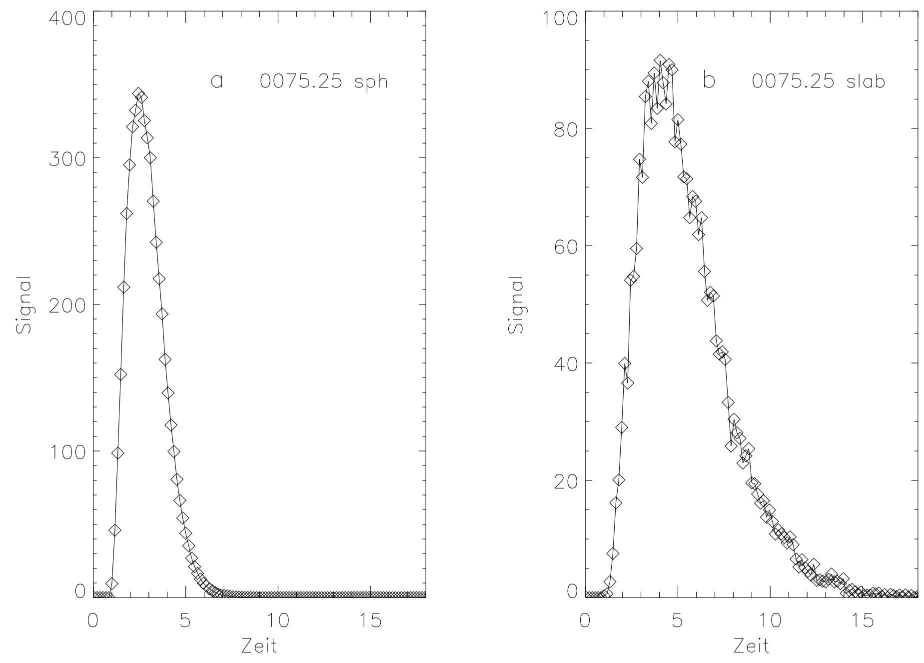


Abbildung 5.19: Simulierte Comptonpulse für a) sphärische und b) scheibenartige Geometrie der aktiven Region ($\tau_o = 0.75$, $T_e \approx 128$ keV). Um einen Vergleich der Relaxationszeiten zu erleichtern, wurden die unterschiedlichen Pulsamplituden in ihrer Darstellung einander angepaßt.

ter, der die Variationszeitskalen bestimmt, die Relaxationszeit τ des verwendeten Comptonpulses ist[29].

Es soll nicht verschwiegen werden, daß das präsentierte einfache Modell einer Koronakugel auch Schwächen besitzt. So scheint die Relaxationszeit der Comptonpulse bei Temperaturen $T_e > 0.4 \cdot m_e c^2$ wieder abzunehmen (s. Abb. 5.16c, d). Desweiteren erscheinen die simulierten Photonenspektren, die sich für typische AGN Parameter ($T_e \approx 150$ keV, $\tau_o \in 0.1 \ldots 1$, Mushotzky et al. 1993) ergeben, als zu weich ($\Gamma > 2$). Beide Abweichungen sind aber wohl durch die ungenügende Koronageometrie zu erklären, da im Mittel die Photonen *zu schnell* aus der Korona entweichen können. Abhilfe schafft hier ein ebenes *sandwich* Koronamodell, bei dem die UV–Photonen in einer dünnen Schicht emittiert werden, die vom heißen Elektronengas umgeben ist. Durch die größere flächenhafte Ausdehnung des comptonisierenden Mediums erfahren die Photonen im Vergleich zur Koronakugel mehr Stöße, was neben härteren Spektren auch längere Relaxationszeiten der Comptonpulse zur Folge hat (s. Abb. 5.19).

[29]Die gezeigten Zeitreihen besitzen identische dynamische Parameter ($\rightarrow$ gleiche Zeitskalen) und verschiedene Impulsraten ($\rightarrow$ unterschiedliche Helligkeiten, Varianzen).

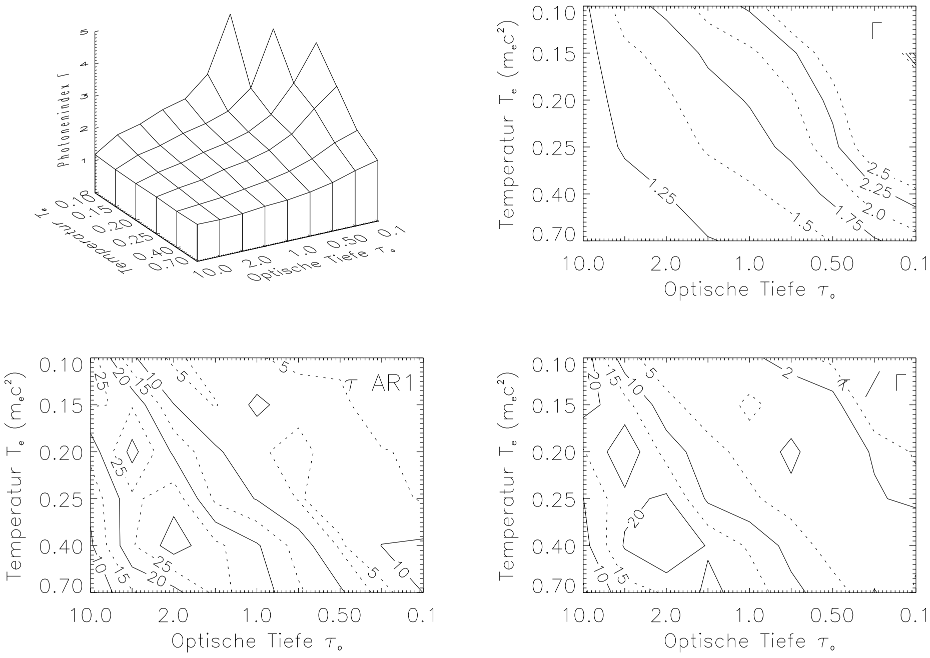


Abbildung 5.20: (oben links) Ermittelte Photonenindizes Γ für Compton Scheibengeometrie, (oben rechts) zugehörige Konturlinien, (unten links) gemessene Relaxationszeiten der mit Hilfe der Comptonpulsen simulierten *shot noise* Zeitreihen, (unten rechts) Verteilung des Quotienten τ/Γ.

Für typische AGN Parameter ($\tau_o = 0.75$, $T_e \approx 128$ keV) ergeben sich für die Scheibengeometrie, im Vergleich zur Kugelgeometrie, Comptonpulse kleinerer Maximalamplitude und längerer Relaxationszeit, da sich die Photonen im statistischen Mittel *länger* in der Korona aufhalten und mehr harte Röntgenphotonen entstehen[30].

Die simulierten Photonenspektren für eine angenommene Scheibengeometrie liefern Potenzgesetze, deren Steigung Γ mit ansteigender Elektronentemperatur T_e, wie auch bei größer werdender optischen Tiefe τ_o abnimmt (s. Abb. 5.20). Benutzt man die aus der zeitabhängigen Comptonisierung gewonnenen Pulse zur Erzeugung von *shot noise* Zeitreihen, so kann man, analog zur Behandlung der Original EXOSAT ME Zeitreihen, LSSM Relaxationszeiten schätzen. Die Verteilung der erhaltenen Relaxationszeiten über dem gerechneten τ_o-T_e Gitter (s. Abb. 5.20, unten links) zeigt kein strikt monotones Verhalten. Für eine bestimmte Temperatur nehmen die Relaxationszeiten mit steigender optischen Tiefe zu, und fallen aber dann, nach Erreichen eines Maximalwertes $\tau_{o,max}$ ab. Dieses Maximum $\tau_{o,max}$

[30]Viele Röntgenphotonen besitzen nach Durchlaufen der Scheibenkorona Energien > 9 keV, wodurch sie dem hier betrachteten Energiebereich *verloren* gehen. Dieser Verlust äußert sich in einer Abnahme der Maximalamplitude.

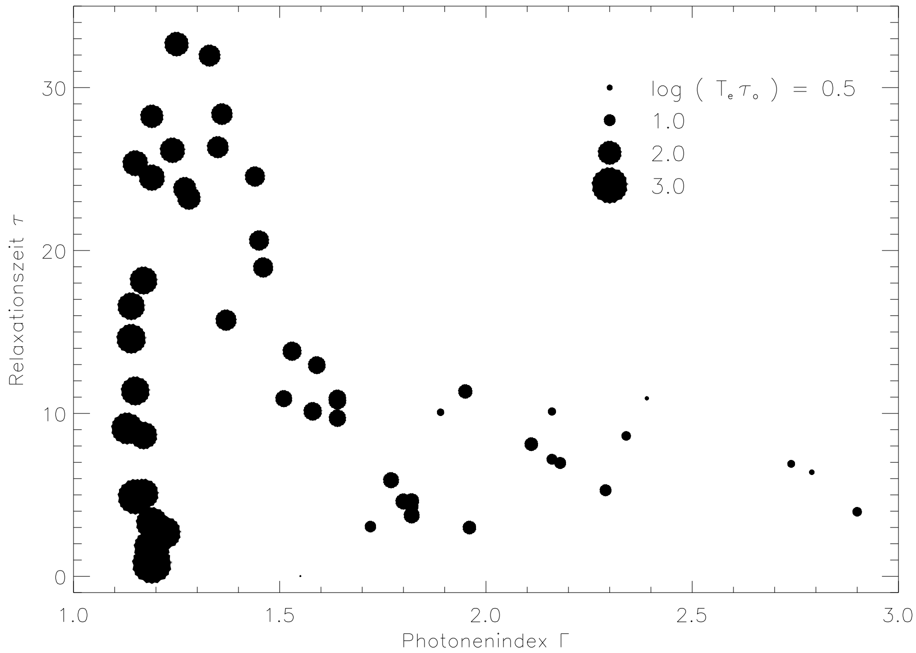


Abbildung 5.21: Γ-τ Relation der für die Scheibengeometrie simulierten Zeitreihen. Jeder Punkt entspricht einer τ_o-T_e Kombination. Die Punktstärke repräsentiert den Logarithmus des zugehörigen Comptonparameters y.

liegt bei kleineren Temperaturen bei größeren optischen Tiefen.

Versucht man nun, die Resultate der Simulationen mit der empirischen Γ-τ Relation in Einklang zu bringen, so erkennt man, daß nur für optische Tiefen $\tau_o > \tau_{o,max}$ (für eine Temperatur T_e) mit zunehmenden Photonenindex Γ *kürzere* Relaxationszeiten folgen. Somit sind τ_o-T_e Kombinationen, die diese Bedingung nicht erfüllen (d.s. hohe Temperaturen und große optische Tiefen), nicht mit den Ergebnissen der EXOSAT Studie verträglich.

Wie gut die *sandwich* Geometrie der comptonisierenden Elektronenwolke die Realität beschreibt, wird dann deutlich, wenn man die Ergebnisse der Simulationen in einem Γ-τ Diagramm darstellt (s. Abb. 5.21). Da der gewählte Energiebereich $2-9$ keV der zu berücksichtigenden Röntgenphotonen nur einen Ausschnitt der Energieverteilung beschreibt, tauchen in der Γ-τ Relation auch Punkte auf, die ausgeschlossen werden müssen. Es sind dies zum einen solche - schlecht definierte - Comptonpulse (s. Abb. 5.17a), die kaum Photonen im fraglichen Energiebereich besitzen, da der zugehörige Comptonisierungsparameter y ($\propto T_e \cdot \tau_o$) zu klein ist. Im Diagramm trifft dies auf solche Punkte zu, deren Relaxationszeit im Bereich $\tau = 5 \ldots 10$ liegt und deren Photonenindex $\Gamma > 1.9$ ist. Ist der Comptonisierungsparameter zu groß, so besitzt die Mehrheit der gestreuten Röntgenphotonen Energien > 9 keV, wodurch sich eine scheinbare zeitliche

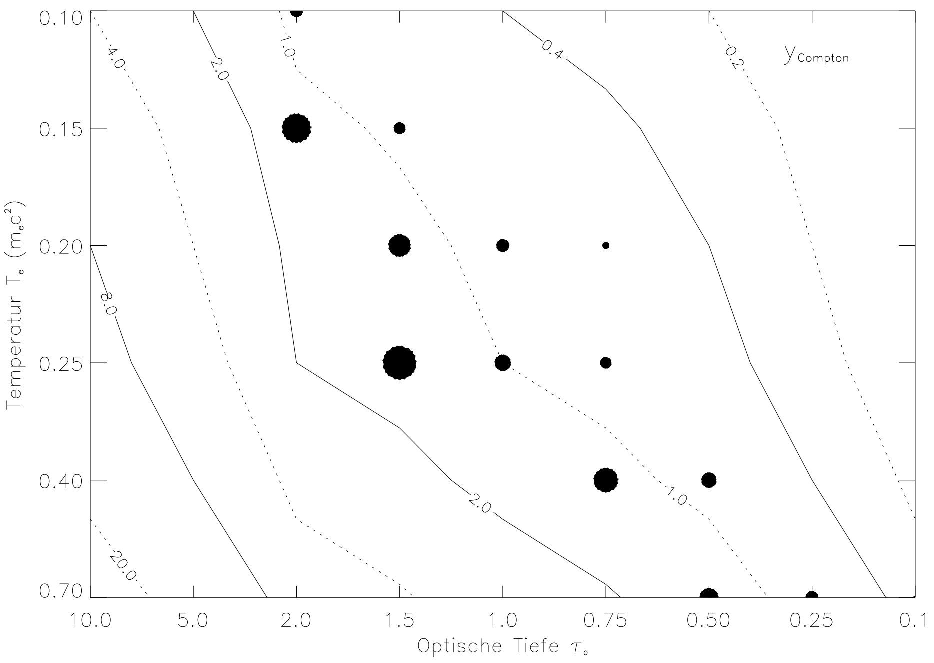


Abbildung 5.22: Darstellung der Comptonisierungsparameter der Γ-τ Werte, die die empirische Relation bestätigen. Als Auswahlkriterium diente der Wertebereich $\Gamma = 1.3 \ldots 1.9$ (s. Abb. 5.21). Die Punktstärke ist hier ein lineares Maß für die zugehörige Relaxationszeit τ der LSSM Schätzung der simulierten Zeitreihen (Scheibengeometrie).

Verkürzung der Comptonpulse bei Energien $2 - 9$ keV ergibt. Die zugehörigen Punkte im Γ-τ Diagramm liegen bei Werten $\Gamma < 1.3$ und zeigen bei abnehmenden Photonenindex einen steilen Abfall der geschätzten Relaxationszeit. Die im Bereich von $\Gamma = 1.3 \ldots 1.9$ liegenden Punkte zeigen das in den EXOSAT ME AGN Zeitreihen gefundene Verhalten: Mit zunehmendem Photonenindex Γ fallen die Relaxationszeiten τ annähernd linear ab.

Separiert man nun die Punkte im Γ-τ Diagramm, die die Relation erfüllen, und trägt die jeweiligen τ_{o}-T_{e} Werte in ein Diagramm ein, stellt man fest, daß alle Punkte einen nahezu identischen Comptonisierungsparameter $y \propto T_{\mathrm{e}}\tau_{\mathrm{o}}$ besitzen (5.22). Gibt man die Temperatur in Einheiten von keV an, so kann man folgende Beziehung ableiten:

$$T_{\mathrm{e}} \cdot \tau_{\mathrm{o}} \approx \frac{m_e c^2}{4} \tag{5.14}$$

Innerhalb dieser Beziehung streuen die zugehörigen Relaxationszeiten je nach τ_{o}-T_{e} Kombination. Bei festgehaltener optischer Tiefe τ_{o} entspricht einer Temperaturzunahme eine gleichzeitige Zunahme der Relaxationszeit[31]. Bewegt man sich isotherm im τ_o-T_e Diagramm, so nehmen die Relaxationszeiten analog mit zunehmender optischer Tiefe zu.

Da man in der empirischen Γ-τ Relation (s. Abb. 5.15) keine AGNs beobachtet, die deutlich vom linearen Verlauf abweichen, kann man schliessen, daß in der Natur nur solche Comptonisierungsparameter auftreten, die der gefundenen Beziehung in Gl. 5.14 genügen. Die beobachtete Variation der Relaxationszeiten und der Photonenindizes entspricht unter dieser Prämisse der Streuung des Comptonisierungsparameters. Interessanterweise entspricht der Verlauf der ($y_{\rm Compton}$=1.0)-Konturlinie in Abb. 5.22 gut dem erwarteten kanonischen Wert des Photonenindex' von $\Gamma = 1.75$ für AGN Röntgenspektren (vgl. Abb. 5.20).

Eine Modellanpassung einer linearen Funktion liefert $\tau_{\rm lin} = (78.95 \pm 10.53) - \Gamma \cdot (41.47 \pm 6.57)$ bei Berücksichtigung aller Simulationen im Bereich von $\Gamma = 1.3 \ldots 1.9$ (s. Abb. 5.21, Zeiteinheit ist die Mindestlichtlaufzeit durch die comptonisierende Schicht heißer Elektronen). Benutzt man den Geradenfit der empirischen Γ-τ Relation (s. Abb. 5.15), kann man die Zeiteinheit der Comptonisierungssimulationen in Sekunden ausdrücken: Man findet für die τ-Achsenabschnitte das Verhältnis $\tau(\Gamma = 0)_{\rm EXOSAT}/\tau(\Gamma = 0)_{\rm Sim} = 1.025$ ksec, und analog für die Steigungen $m_{\rm EXOSAT}/m_{\rm Sim} = 1.045$ ksec.

Der Definitionsbereich der Photonenindizes stimmt für die Scheibengeometrie gut mit den experimentellen Werten des EXOSAT AGN Samples überein, wohingegen eine Kugelgeometrie zu weiche Photonenspektren liefert und daher als unrealistisch ausgeschlossen werden muß. Innerhalb des Γ-Definitionsbereiches liegt die Streubreite der Relaxationszeiten, sowohl für die Simulation wie auch für die Empirie, bei $\tau_{max}/\tau_{min} \approx 7 \ldots 8$. Im Rahmen einer Scheibengeometrie für die comptonisierende Region beträgt die minimale Lichtlaufzeit und damit die Dicke der Korona ≈ 1 ksec. Diese Größe beschreibt einen für alle AGN konstanten Wert, unabhängig vom Photonenindex und Relaxationszeit.

Die gefundene lineare Γ-τ Abhängigkeit stellt ein interessantes Resultat des diskutierten Comptonisierungsmodelles dar, da auf analytischem Wege derartige funktionale Zusammenhänge nicht gefolgert werden können.

Die ermittelte Konstanz der Koronadicke (in der *sandwich* Geometrie) erscheint auf den ersten Blick verblüffend, läßt sich jedoch durch einfache Überlegungen bzgl. der Bewegung[32] einer Masse im Schwerefeld eines Schwarzen Loches verstehen (Thorne 1994). Das Gravitationspotential, das die Dynamik der

[31] In Abb. 5.22 zeigt sich dies in einer Zunahme der Punktstärke, wenn man auf einer Vertikalen herabläuft.

[32] Die Bewegung eines Materiepaketes (Masse m) in einer Akkretionsscheibe läßt sich aufgrund der geltenden Rotationssymmetrie durch eine zweidimensionale Bewegungsgleichung $\frac{\dot{r}^2}{2} + V_N(r) = \frac{E}{m}$, $r^2\dot{\phi} = \ell_B = $ const. (Polarkoordinaten r, ϕ, Bahndrehimpuls ℓ_B) beschreiben.

akkretierten Materie bestimmt, ist durch die Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART, Melcher 1978) gegeben als

$$\begin{aligned} V_E(r) &= V_N(r) - \frac{r_S\,\ell_B^2}{2r^3} \\ &= -\frac{GM}{r} + \frac{\ell_B^2}{2r} - \frac{r_S\,\ell_B^2}{2r^3} \quad . \end{aligned} \tag{5.15}$$

Das effektive Potential ergibt sich somit als Summe aus V_N (Newton'sches Gravitationspotential und Zentrifugalterm) und einem Term, der durch die Ersetzung der absoluten Zeit durch die Eigenzeit der ART in den Zeitableitungen der Bewegungsgleichung entsteht (Sexl & Sexl 1985). Die akkretierte Materie läuft für $r = 3r_S$ auf dem kleinstmöglichen Keplerorbit. Bei weiter innen liegenden Bahnen wird die Bewegung instabil und die Akkretion erfolgt hier fast radial ($\ell_B \approx 0$). Das Potential vereinfacht sich demnach zu $V_E(r < 3r_S) \approx -\frac{GM}{r} = -\frac{1...3 \cdot c^2}{2}$. Somit erfährt der Innenbereich der AGN Akkretionsscheibe, unabhängig von der Zentralmasse, immer das gleiche Gravitationspotential (das die Bewegung der heißen Elektronen der Korona bestimmt). Daraus ergibt sich die obige Folgerung einer konstanten Schichtdicke der Korona.

Die Simulationen zur Comptonisierung lieferten (für typische τ_o-T_e Werte) eine wahrscheinlichste Aufenthaltszeit für Lichtlaufzeiten von $\approx 4 \cdot t_{min}$ (Mindestlichtlaufzeit t_min = Koronadicke/c $\approx$ 1 ksec, s. Abb. 5.19). Berücksichtigt man den Umstand, daß die meisten gestreuten Photonen sich nicht linear ausgebreitet haben, kann man schließen, daß UV–Photonen, die bei Radien r_0 in das Medium eintreten, bei Radien r mit $|r - r_0| < 4 \cdot t_\mathrm{min}$ als Röntgenphotonen die Korona verlassen werden. Diese Ausdehnungsbegrenzung des wirksamen Bereichs auf maximal $\approx$ 4 ksec befindet sich im Einklang mit den erwarteten Bereichsgrenzen für instabile Orbits für Zentralmassen $> 10^8 M_\odot$ (hier ist $1 \ldots 3\ r_S = 984 \ldots 2950$ sec, s. Gl. 5.3)[33]. Ein Problem mit diesem Modell einer Korona innerhalb der instabilen Region ergibt sich aus der beobachteten Reflexionskomponente in AGN Energiespektren (s. .Kap. 5.1.2). Die hierzu nötige Reprozessierung der erzeugten Röntgenphotonen an kaltem Material wäre aus Gründen der Geometrie nur dann möglich, wenn der Innenbereich mit Wolken kalten Materials umgeben wäre.

Da man aus der Empirie zwar die konstante Koronadicke folgern kann, eine Lokalisierung der Korona aber nicht möglich ist, wäre es auch denkbar, in einem konkurrierenden Modell die aktive Region *nicht* im instabilen Innenbereich der Akkretionsscheibe zu positionieren. Die Korona, d.h. die Schicht aus heißen Elektronen könnte alternativ den aufgeblähten Scheibenbereich $r > 3 \cdot r_S$ umgeben (s. Dörrer 1995). Da aber in solch einer Geometrie mit einer Veränderung der Zentralmasse auch die Längenskalen variieren, erscheint hier die Konstanz

[33] Bei Zentralmassen $M < 10^8 M_\odot$ reicht das Medium in den Bereich stabiler Orbits hinein, was der Annahme eines von M unabhängigen Potentials widersprechen würde.

der Koronageometrie fraglich. Ein Ausweg wäre eine genaue Untersuchung der magnetischen Wechselwirkung lokaler Magnetfelder mit dem Scheibenmaterial (s. Kap. 5.3.1), um zu klären, in wieweit diese Wechselwirkung von der Zentralmasse der Aktiven Galaxie abhängt.

Abschließend bleibt zu bemerken, daß die Simulationen zur Comptonisierung eine exemplarische Untersuchung darstellen, die im Rahmen der zugrundegelegten Interpretation zwar plausibel erscheint, nicht aber den einzig möglichen Lösungsansatz darstellt.

Kapitel 6

Zusammenfassung

6.1 Ergebnisse der EXOSAT AGN Studie

Die bisherigen Versuche einer Beschreibung und Klassifizierung beobachteter Variationen in den Röntgenlichtkurven Aktiver Galaxien durch Fouriertechniken im Frequenzraum (McHardy 1985, McHardy 1989, Green et al. 1993, Lawrence & Papadakis 1993, Papadakis & Lawrence 1995) wie auch durch chaotische Prozessbeschreibungen im Zeitraum (McHardy & Czerny 1987, Lehto et al. 1993) lieferten nicht zufriedenstellende, ja mitunter sogar widersprüchliche Ergebnisse (s. Kap. 5.1.3). Durch die Anwendung der stochastischer Modellbeschreibung im Rahmen eines linearen Zustandsraummodelles ist es erstmals gelungen, mit der Relaxationszeit τ des geschätzten AR[1] Prozesses, eine selbstkonsistente und robuste Variabiliätszeitskala zu definieren. Diese Zeitskala beschreibt in beeindruckender Weise die sichtbare Dynamik der Röntgenlichtkurven.

Die in der Literatur oft verwendete Abschätzung der Maximalgröße der Röntgenemissionsregion aus der schnellsten Variationszeitskala beinhaltet mögliche Fehlerquellen und sollte deshalb zur Charakterisierung *nicht* verwendet werden. Es wurde gezeigt, daß auch Punktquellen die beobachtete Variabiltät zwanglos erklären und zudem mit dem vermuteten Comptonisierungsprozess vereinbar sind, wohingegen eine flächenhafte Helligkeitsemission zu Widersprüchen führt. Desweiteren stellt die Zufälligkeit der AGN Beobachtung und damit die sich ergebende Zufälligkeit der beobachteten schnellsten Zeitskala keinen veritablen Weg einer Variabilitätsuntersuchung dar. Das Zustandsraummodell erfaßt nicht nur ein Detail der Lichtkurve, sondern benutzt das Zusammenwirken aller auftretenden zeitlichen Korrelationen zur Charakterisierung der AGN Variabilität.

Das bemerkenswerteste Argument für die Richtigkeit des LSSM Ansatzes liefert die Untersuchung des EXOSAT AGN Samples. Hier wurde gezeigt, daß die zeitlichen und energetischen Informationskanäle, die bislang meist voneinander unabhängig untersucht wurden, zusammen ein konsistentes Bild des AGN Emissionsprozesses liefern. Die gefundene Γ-τ–Relation wird es in Zukunft ermöglichen, theoretische AGN Modelle zu testen, um wichtige Kenngrößen wie Koronageometrie, optische Tiefe, Temperatur und nicht zuletzt auch den wichtigsten AGN Parameter, die Masse der zentralen Schwarzen Loches zu bestimmen.

6.2 Ausblick

Für die Anwendung der LSSM Methodik eröffnet sich allgemein jede Art von gemessener Zeitreihe. Beschränkt man sich auf die Astronomie, so bieten sich im Röntgenbereich als Forschungsobjekte neben Aktiven Galaxien auch Röntgendoppelsterne (*X-ray binaries* XRB) an. Im Bereich optischer Photometriedaten sind außerdem eine Reihe von Phänomenen bekannt, die ein irreguläres Verhalten zeigen und nur schwer mit herkömmlichen Analysemethoden zu beschreiben sind. Die folgende Liste faßt die, in diesem Zusammenhang interessantesten Fragestellungen zusammen und beschreibt neue mögliche LSSM Anwendungsgebiete.

- Reproduzierung und Erweiterung der AGN Untersuchungen und weitere Etablierung der Γ-τ-Relation durch Röntgenlichtkurven anderer Satelliten (bedingt *Rossi X-ray Timing Explorer* RXTE, *X-ray Multi Mirror* XMM).

- Untersuchung der Energieabhängigkeit der Relaxationszeit am Beispiel einzelner AGN Beobachtungen. Kreuzkorrelation der Zeitreihen verschiedener Energiebänder. Untersuchung der Energieabhängigkeit der Phasenlage der Comptonisierungspulse.

- Untersuchung von Langzeitbeobachtungen im Röntgen- und optischen Wellenlängenbereich (Verwendung der GRO–BATSE, RXTE–ASM Lichtkurven).

- Untersuchung der zeitlichen Substrukturen in *Gamma-Ray bursts* (GRBs). Entwicklung einer alternativen Burstzeit im Vergleich zu den bislang verwendeten T_{50} und T_{90} Angaben. Erste Studien zeigen einen möglichen Zusammenhang zwischen Relaxationszeit und Energiebereich der detektierten Burst–Zeitreihe. Die beobachtete Antikorrelation von Energie und τ entspricht der Beobachtung, das GRBs in der Abklingphase ein immer weicher werdendes Spektrum zeigen. Dieses Verhalten läßt sich quantifizieren und mit einem AR Modell erklären.

- Schwankungen der Pulsprofile in wind-akkretierenden Röntgendoppelsternen(*high mass* XRB) um das mittlere Tages-Pulsprofil. Die schellen Helligkeitschwankungen entstehen durch Variationen in der Massenakkretionsrate (unsteter Sternwind). Der Materieüberschuß in der Akkretionsregion des kompakten Objektes wird langsam abgebaut und erhöht die Röntgenleuchtkraft. Die Zeitskalen dieser Schwankungen enthalten Informationen über den Emissionsprozeß und über die Systemparameter des kompakten Objektes.

- Säkulare Entwicklung von Pulsperioden in XRB und deren Änderungen ($\dot{P}(t), \ddot{P}(t)$). Die Variationszeitskalen sind eng mit Prozessparametern (Geometrie, Flächendichte der Akkretionsscheibe) verbunden und erlauben daher die Überprüfung und Weiterentwicklung bestehender Modelle.

- Untersuchung semi-periodischer Zeitreihen durch komplexe AR Modelle (RV Tau Cepheiden, δ–Scuti Sterne, Mira–Veränderliche). Die bislang angewandeten multiperiodischen Modelle sind oftmals unterbestimmte Beschreibungen. Weniger Freiheitsgrade lassen mehr Rückschlüsse auf den Prozess zu. Erste Analysen zeigen, daß stochastische Modelle große Vorteile bei der dynamischen Modellierung im Vergleich zu einer chaotischen Beschreibung besitzen (König et al. 1997b).

Anhang A

Mathematischer Anhang

1.1 AR[1] Spektrun

Ein Autoregressiver Prozeß 1. Ordnung besitzt das theoretische Spektrum

$$f(\omega) \;=\; \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 + a^2 - 2\,a\;\cos(\omega)} \tag{A.1}$$

Dabei ist a der die Dynamik des Systems bestimmende Parameter aus $x(t) = a\,x(t-1) + \epsilon(t)$ und σ_ϵ^2 ist die Varianz des Rauschens $\epsilon(t)$, das den AR[1] Prozess antreibt. Die Größe $\omega = 2\pi\lambda$ wird zur Vereinfachung beim Ableiten verwendet.

Diese Funktion $f(\lambda)$ besitzt die Ableitungen

$$f'(\omega) \;=\; 2\,a\,\sigma_\epsilon^2\,\frac{-\sin(\omega)}{(1 + a^2 - 2\,a\cos(\omega))^2} \tag{A.2}$$

$$f''(\omega) \;=\; 2\,a\,\sigma_\epsilon^2\,\frac{4\,a - 2\,a\cos^2(\omega) - (1+a^2)\cos(\omega)}{(1 + a^2 - 2a\cos(\omega))^3} \tag{A.3}$$

Man erkennt hieraus, daß das $f_{\mathrm{AR}[1]}$ Spektrum eine monoton fallende Funktion beschreibt, die für $\omega = 0$ und $\omega = \pi$ waagrechte Tangenten in den Punkten E_1 und E_2 besitzt. Die positiv definite Funktion $f_{\mathrm{AR}[1]}$ besitzt desweitern einen Wendepunkt in W_1[1].

$$E_1\left(0|\frac{\sigma_\epsilon^2}{1+a^2-2a}\right), \quad E_2\left(\pi|\frac{\sigma_\epsilon^2}{1+a^2+2a}\right) \tag{A.4}$$

$$W_1\left(\left(\frac{1}{2}\left((a+4+\frac{1}{a}) \pm \sqrt{a^2+34+\frac{1}{a^2}}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} |f(W_1)\right) \tag{A.5}$$

[1]Bei der Bestimmung des Wendepunktes wurde die Näherung $\cos(\omega) = 1 - \frac{1}{2}\omega^2$ verwendet. Dieses Vorgehen liefert für Werte $a > 0.35$ einen Fehler $< 1\%$.

In diesem Zusammenhang muß betont werden, daß diese Betrachtung der Kenngrößen des AR[1] Prozesses von einer diskreten Zeitreihe $x_d(t_i)$ mit $i \in [1 \ldots N]$ ausgeht. Wie schon zu Beginn von Kap. 2 erläutert, kann man eine Zeitreihe auch als eine kontinuierliche Funktion $x_k(t)$ auffassen, die innerhalb eines endlichen Beobachtungsintervalles zu beliebigen Zeiten t berechnet werden kann. Obwohl diese Unterscheidung auf den ersten Blick noch keine Auswirkungen auf die statistische Beschreibung des Prozesses haben sollten, stellt man doch bei näherer Betrachtung Abweichungen fest, die darauf zurückzuführen sind, daß die Einschränkungen in der Definitionsmenge der Meßzeitpunkte die statistischen Größen von $x_k(t)$ und $x_d(t)$ beeinflussen (Priestley 1996).

Für einen AR[1] Prozess $x_d(t) = a\, x_d(t-1) + \epsilon(t)$ ergibt sich bei der in Kap. (3) verwendeten diskreten Beschreibung der Zeitreihen die Autokovarianzfunktion

$$R_d(\Delta) \;=\; \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-a^2}\, \mathrm{e}^{-\frac{|\Delta|}{\tau}} \tag{A.6}$$

Im Fall einer kontinuierlichen Beschreibung eines AR[1] Prozesses wird die autoregressive Korrelation $x_k(t) \leftrightarrow x_k(t-1)$ durch den Ableitungsoperator $\partial x_k(t) = x_k(t) - x_k(t-1)$ ausgedrückt. Läßt man das zugehörige Zeitintervall ∂t gegen Null gehen (wobei $\partial t > 0$ gültig bleibt), kann man den kontinuierlichen AR[1] Prozess als eine *stochastische Differentialgleichung* schreiben.

$$\begin{aligned} \dot{x}_k(t) + \alpha\, x_k(t) \;&=\; \theta(t) \qquad\qquad (\mathrm{A.7})\\ \text{mit}\quad \alpha = \frac{1-a}{a\cdot\partial t} \quad &, \quad \theta(t) = \frac{\epsilon(t)}{a\cdot\partial t} \end{aligned}$$

Es folgen für Autokovarianz und Spektrum des kontinuierlichen AR[1] Prozesses (Priestley 1996)

$$\begin{aligned} R_k(\Delta) \;&=\; \frac{\sigma_\theta^2}{2\,\alpha}\, \mathrm{e}^{-\alpha|\Delta|} \qquad\qquad (\mathrm{A.8})\\ f_k(\omega) \;&=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \rho(\Delta)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega|\Delta|}\, \mathrm{d}\Delta \\ &=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha\Delta}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\Delta}\, \mathrm{d}\Delta \\ &=\; \frac{1}{\pi}\frac{1}{\alpha - i\omega} \xrightarrow{\text{Realteil}} \frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2} \qquad\qquad (\mathrm{A.9}) \end{aligned}$$

In diesem Zusammenhang ist es wichtig anzumerken, daß z.B. durch die verschiedenen theoretischen Spektren $f_k(\omega)$ und $f_{\mathrm{AR[1]}}(\omega) = f_d(\omega)$ kein Widerspruch in der statistischen Beschreibung *eines* Prozesses $x(t)$ entsteht. Obgleich $x_d(t)$ wie auch $x_k(t)$ denselben Prozess beschreiben, besitzen ihre Spektren unterschiedliche Funktionalität bzgl. ω. Dieser Umstand klärt sich bei der Betrachtung des *integrierten Spektrums* $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} f(\omega')\, d\omega'$. Nach dem Lebesqueschen Lemma über Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Priestley 1996), kann man $F(\omega)$ in einen kontinuierlichen, einen diskreten und einen singulären Anteil[2] zerlegen. In Bezug auf das Spektrum ist $F(\omega)$ eine stetige Funktion für $-\infty < \omega < \infty$ mit Sprungstellen an den Frequenzen $\omega = \omega_j$.

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= c_k\, F_k(\omega) + c_d\, F_d(\omega) + (c_s\, F_s(\omega)) \qquad \text{(A.10)}\\
F(\omega) &= c_k \int_{-\infty}^{\omega} f_k(\omega')\, d\omega' + c_d \int_{-\infty}^{\omega} \delta(\omega' - \omega_j)\, f_d(\omega')\, d\omega'\\
F(\omega) &= c_k \int_{-\infty}^{\omega} f_k(\omega')\, d\omega' + c_d\, \delta(\omega - \omega_j)\, f_d(\omega_j)
\end{aligned}$$

Da in der Astronomie i.a. Meßwerte als diskrete Zeitreihen vorliegen, gilt $c_k = 0$ und $c_d = 1$, das integrierte Spektrum $F(\omega)$ wird vollständig durch den diskreten Anteil beschrieben.

1.2 Shot noise

In der Elektrotechnik wird das aperiodische Schwanken der Stromstärke in elektrischen Schaltungen, die eine Vakuumröhre enthalten, als *shot noise* bezeichnet (Papoulis 1965; Priestley 1996). Das stochastische Modell, das die Variationen der Stromstärke $x(t)$ beschreibt, geht von einem Poisson Prozeß aus, der die Zeitpunkte t_i bestimmt, zu denen bestimmte Zerfallsfunktionen $g(t - t_i), (t > t_i)$ einsetzen. Die Überlagerung dieser stochastisch verteilten Zerfälle ergibt dann die *shot noise* Zeitreihe $x(t)$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß in dem zugrundeliegenden Poisson Prozeß innerhalb der Zeitspanne $t_b \ldots t_a$ genau k Ereignisse stattfinden ist

$$P(z(t_a) - z(t_b) = k) \;=\; \frac{(\lambda(t_a - t_b))^k \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{k}(\mathrm{t_a}-\mathrm{t_b})}}{k!}. \qquad \text{(A.11)}$$

Dabei beschreibt die Zeitreihe $z(t)$ eine Treppenfunktion, die bei jedem eintretenden Poissonereignis inkremetiert wird. Die mittlere Anzahl der Ereignisse ist durch die Konstante λ[3] beschrieben. Konstruiert man nun aus dieser Zeitreihe durch Differenzieren eine Zeitreihe $y(t) = \frac{\partial}{\partial t} z(t)$, die sich als Folge von Delta-Peaks, d.h. als *Punktprozess* schreiben läßt, ergibt sich die *shot noise* Zeitreihe $x(t)$ durch die Faltung dieses Punktprozesses mit der Zerfallsfunktion $g(t)$.

$$\begin{aligned}
x(t) &= y(t) \otimes g(t) \qquad \text{(A.12)}\\
x(t) &= \sum_{i=1}^{N} \delta(t_i) \cdot g(t - t_i) \qquad \text{(A.13)}
\end{aligned}$$

[2]Dieser Anteil, Priestley (1996) nennt ihn *highly pathological*, vervollständigt die mathematische Beschreibung und wird, da für Wahrscheinlichkeitsverteilungen unnötig, weggelassen.

[3]Die Größe λ läßt sich als Impulsdichte, d.h. als Quotient der beobachteten Impulszahl durch das zugehörige Beobachtungsintervall, deuten.

Als Zerfallsfunktion wird meist ein expotentiell zerfallender Puls $g(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$ benutzt. Für diesen Fall besitzt der *shot noise* Prozeß die statistischen Kenngrößen

$$E[z(t)] = \lambda\,\tau \tag{A.14}$$

$$var(z(t)) = \frac{1}{2}\lambda\,\tau \tag{A.15}$$

$$R(\Delta) = (\lambda\,\tau)^2 + \frac{1}{2}\lambda\,\tau\,\mathrm{e}^{-\frac{|\Delta|}{\tau}} \tag{A.16}$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left((\lambda\,\tau)^2\delta(\omega) + \frac{\lambda}{\frac{1}{\tau^2}+\omega^2}\right) \tag{A.17}$$

Die angeführten Kenngrößen beziehen sich auf die Prozeßbeschreibung mittels einer kontinuierlichen Zeitreihe $x(t)$ (s.App. 1.1). Die für das Spektrum abgeleitete Frequenzabhängigkeit entspricht erwartungsgemäß der für einen kontinuierlichen AR[1] Prozeß. Vergleicht man die Parameter mit den in Gl. (A.9) auftretenden, findet man den Zusammenhang $\tau = \frac{1}{\alpha} = \frac{a\partial t}{1-a}$.

1.3 Lückenfüllung bei AR[1] Prozessen

Aus der Prädiktionstheorie stochastischer Prozess kann man, bei bekannter Systemdynamik, Beobachtungslücken mit Hilfe eines einfachen Interpolationsalgorithmus' auffüllen. Das hier dargestellte Vorgehen besitzt gegenüber einem Auffüllen mit Weissem Rauschen oder einer linearen Interpolation deutliche Vorteile, da keine *künstlichen*, sondern nur systemeigene Zeitskalen verwendet werden.

Die Beobachtungslücke im Bereich von $t = t_i \dots t_f$ soll durch eine Funktion der Form

$$x_{\mathrm{fill}}(t) = x_{t_i}\cdot\mathrm{e}^{-(\mathrm{t}-\mathrm{t_i})/\tau} + \mathrm{x_{t_f}}\cdot\mathrm{e}^{-(\mathrm{t_f}-\mathrm{t})/\tau} \tag{A.18}$$

interpoliert werden. Dieser Ansatz ist gerechtfertigt, da ein AR[1] Prozess, unter der Annahme, daß keine neue Information für $t_i < t < t_f$ hinzukommt, mit der Relaxationszeit τ zerfällt. Aufgrund der zeitlichen Umkehrinvarianz stationärer Zeitreihen gilt dies auch bei umgekehrtem Zeitpfeil, woraus Gleichung A.18 folgt.

Für die Randwerte x_{t_i} und x_{t_f} folgt hieraus

$$x_{t_i} = \frac{x(t_f)\cdot e^{n_\tau} - x(t_i)}{2\sinh(\mathrm{n}_\tau)} \tag{A.19}$$

$$x_{t_f} = \frac{x(t_i) - x(t_f)\cdot e^{-n_\tau}}{1-e^{-2\,n_\tau}} \tag{A.20}$$

$$\text{mit}\quad n_\tau = (t_f - t_i)/\tau \quad .$$

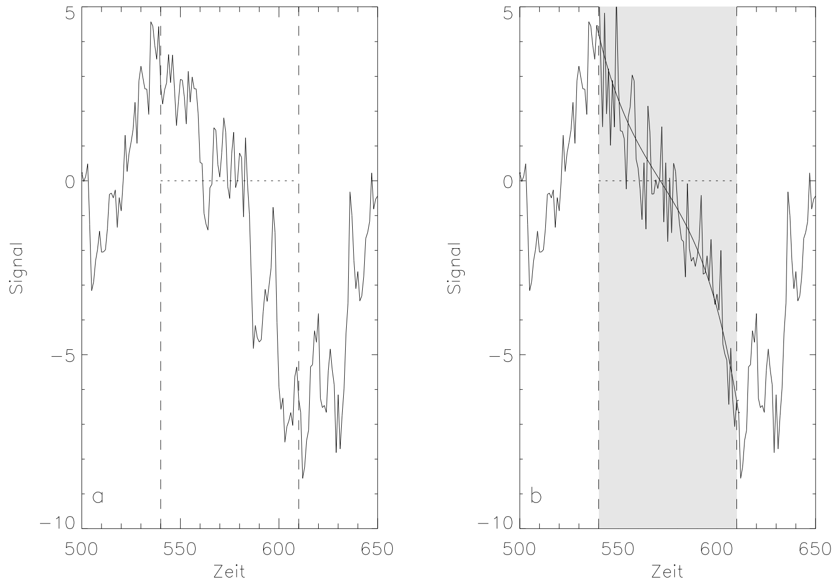


Abbildung A.1: (a) Ausschnitt aus einer simulierten AR[1] Zeitreihe mit $\tau = 20$ ($\epsilon \in \mathcal{N}(0,1)$), die Linien markieren die Beobachtunslücke. b) Die durchgezogene Linie beschreibt die Werte der AR[1] Interpolation über den Bereich der Beobachtungslücke. Zum besseren Vergleich wurde der Interpolation ein Rauschbeitrag hinzuaddiert.

Wie man an dem in Abb. A.1 gezeigten Beispiel erkennt, erreicht diese Prozedur selbst bei Beobachtungslücken mit Längen von einigen τ gute Beschreibungen der Prozessdynamik.

Anhang B

Das EXOSAT AGN Sample

2.1 Röntgenlichtkurven

Die hier gezeigten Röntgenlichtkurven des EXOSAT AGN Samples stellen überarbeitete Versionen der Lichtkurven des HEASARC Archives dar, da hier die ursprünglichen 30 sec Zeitbins in 240 sec lange Zeiteinheiten *umgebinnt* wurden. Dadurch ergibt sich eine Glättung der stark verrauschten EXOSAT ME Zeitreihen, was die visuelle Beurteilung erleichtert.

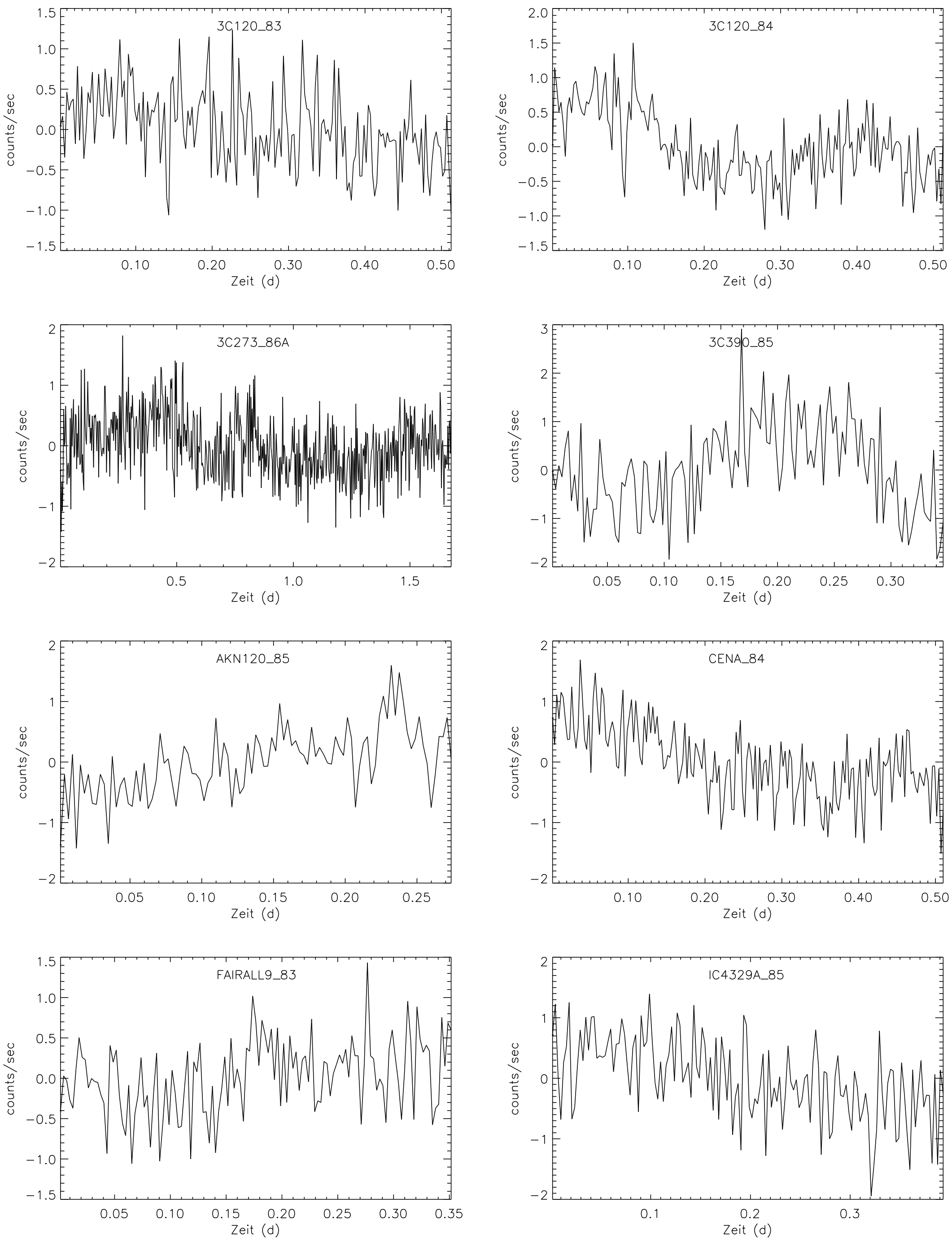


Abbildung B.1: EXOSAT Röntgenlichtkurven (240 sec Zeitbins).

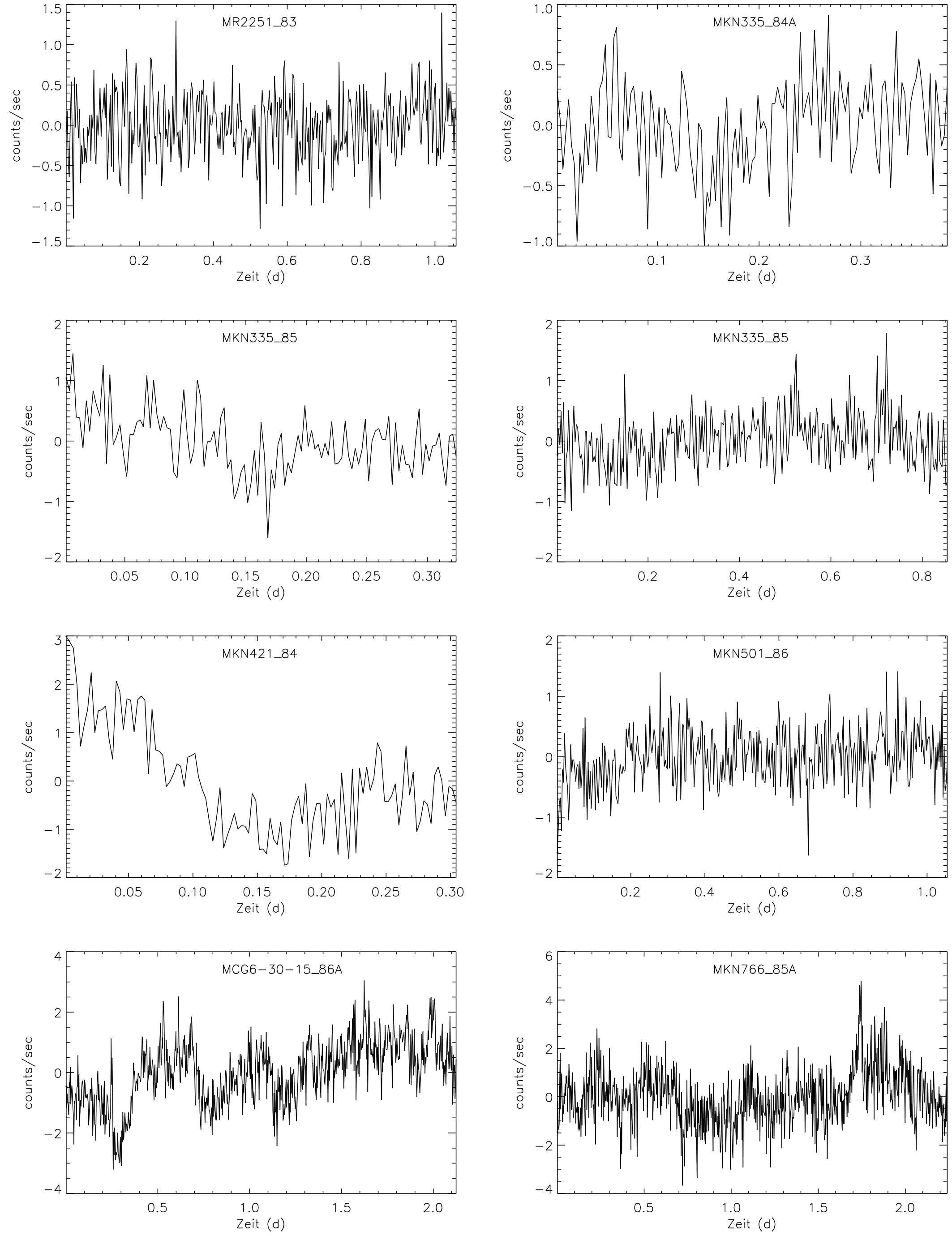


Abbildung B.2: EXOSAT Röntgenlichtkurven (240 sec Zeitbins).

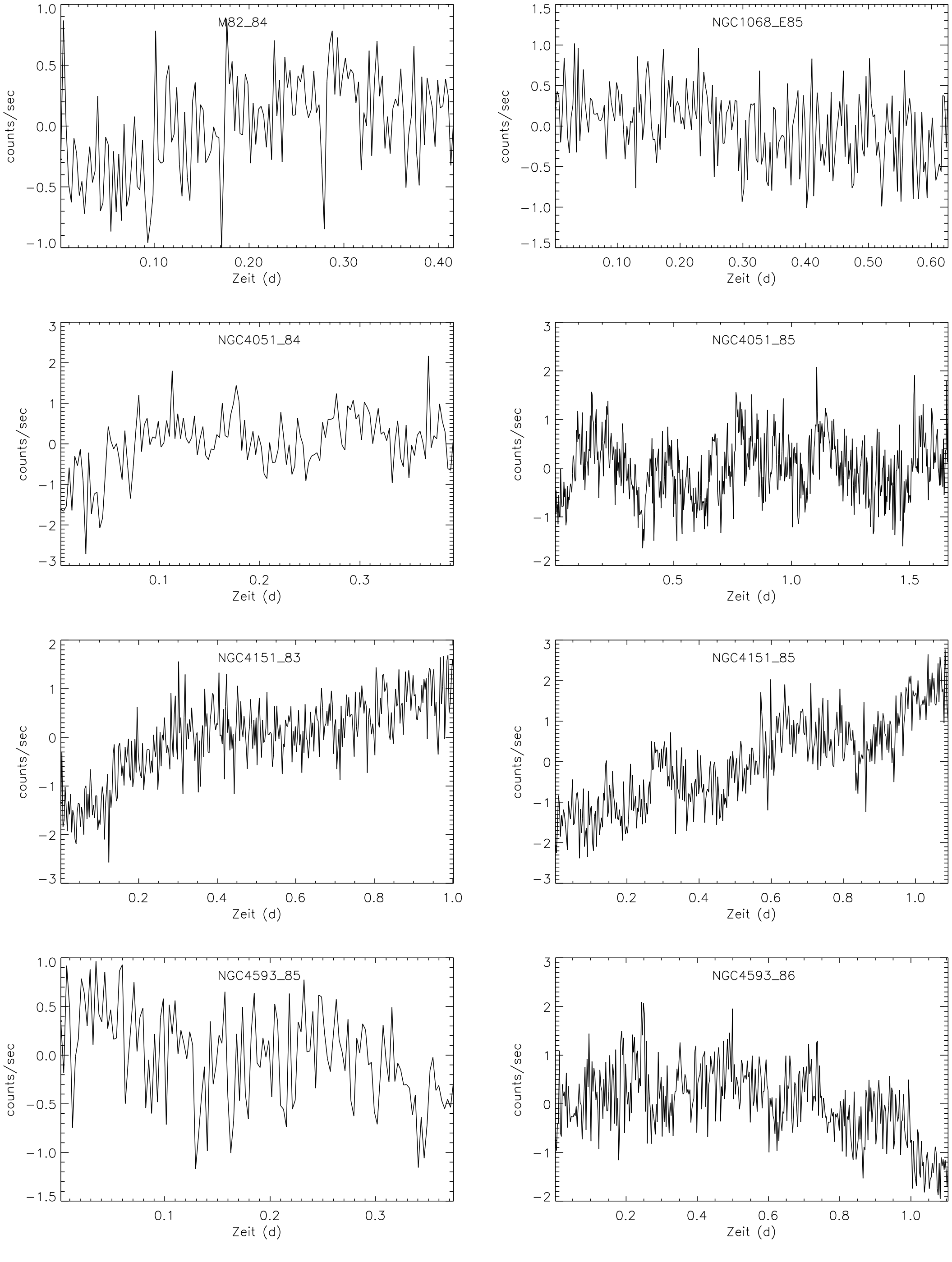


Abbildung B.3: EXOSAT Röntgenlichtkurven (240 sec Zeitbins).

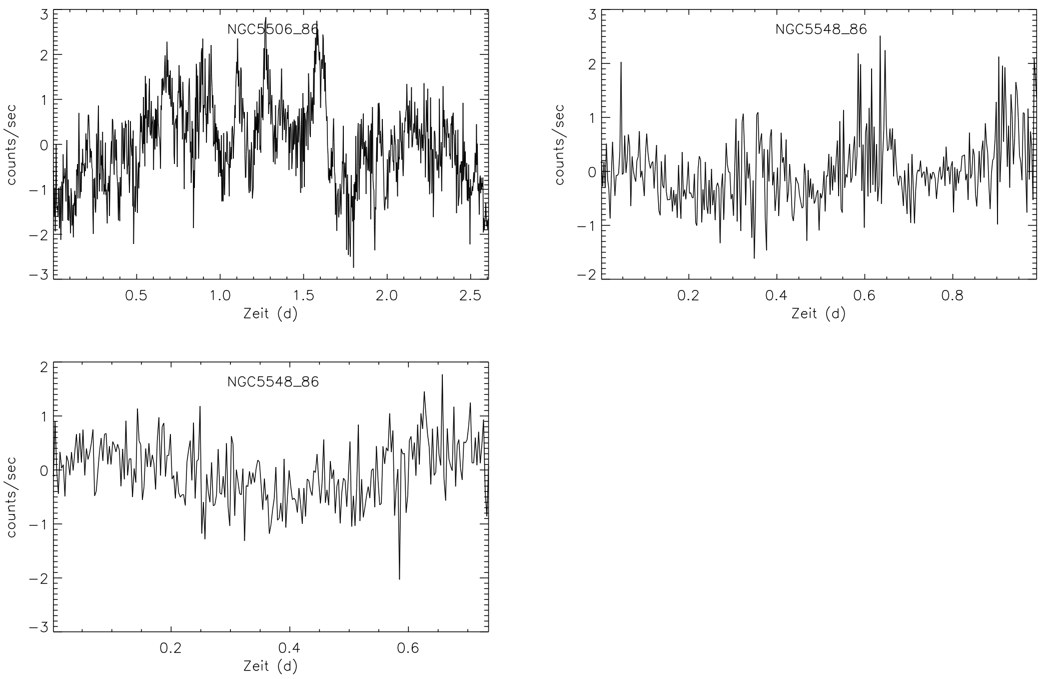


Abbildung B.4: EXOSAT Röntgenlichtkurven (240 sec Zeitbins).

2.2 Periodogramme

Die errechneten Periodogramme der EXOSAT ME Röntgenlichtkurven wurden logarithmisch gebinnt (Punkte) und an diese Verteilungen wurde ein $1/f^{\alpha}$–Modell angepaßt (durchgezogene Linie).

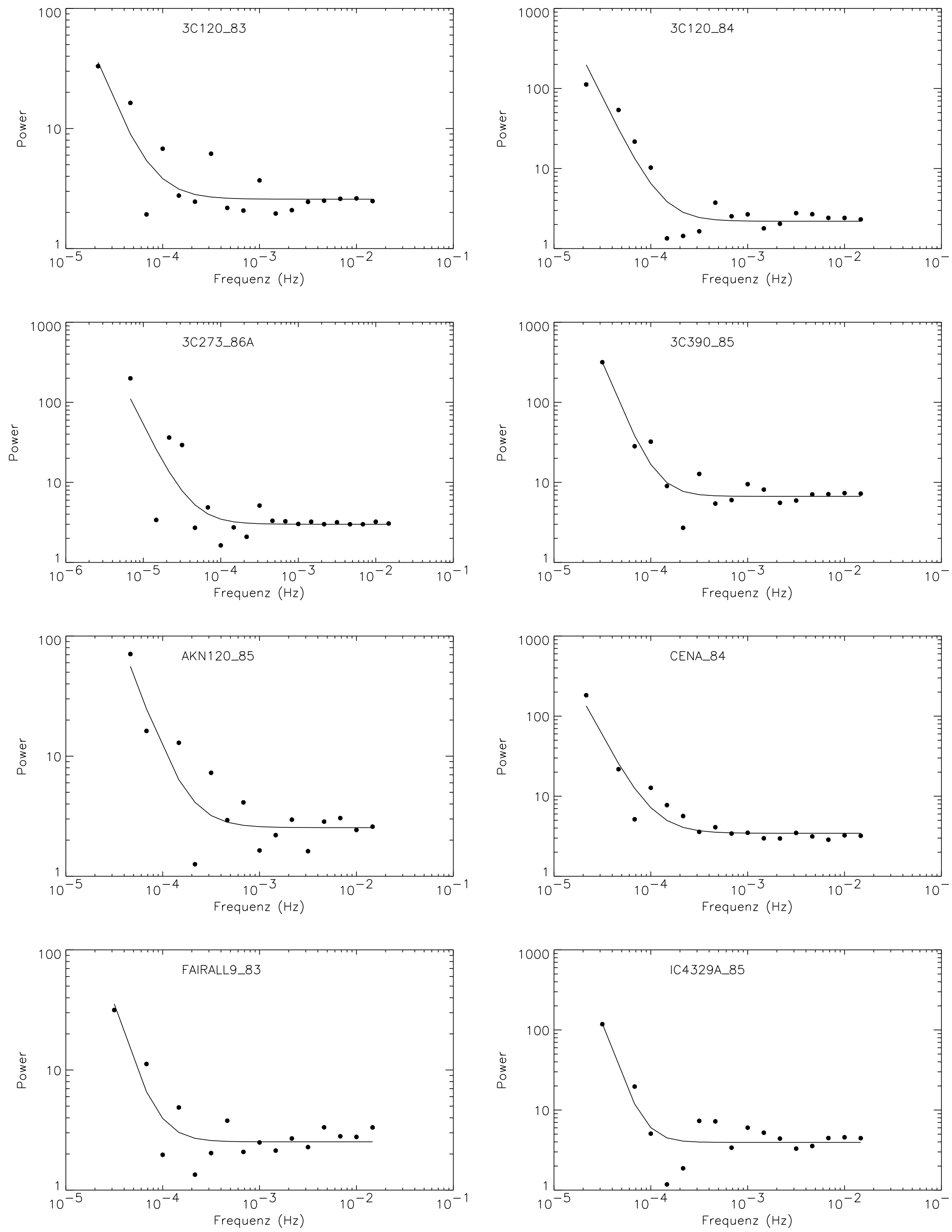


Abbildung B.5: Periodogramme der EXOSAT Röntgenlichtkurven ($1/f^{\alpha}$-Modell).

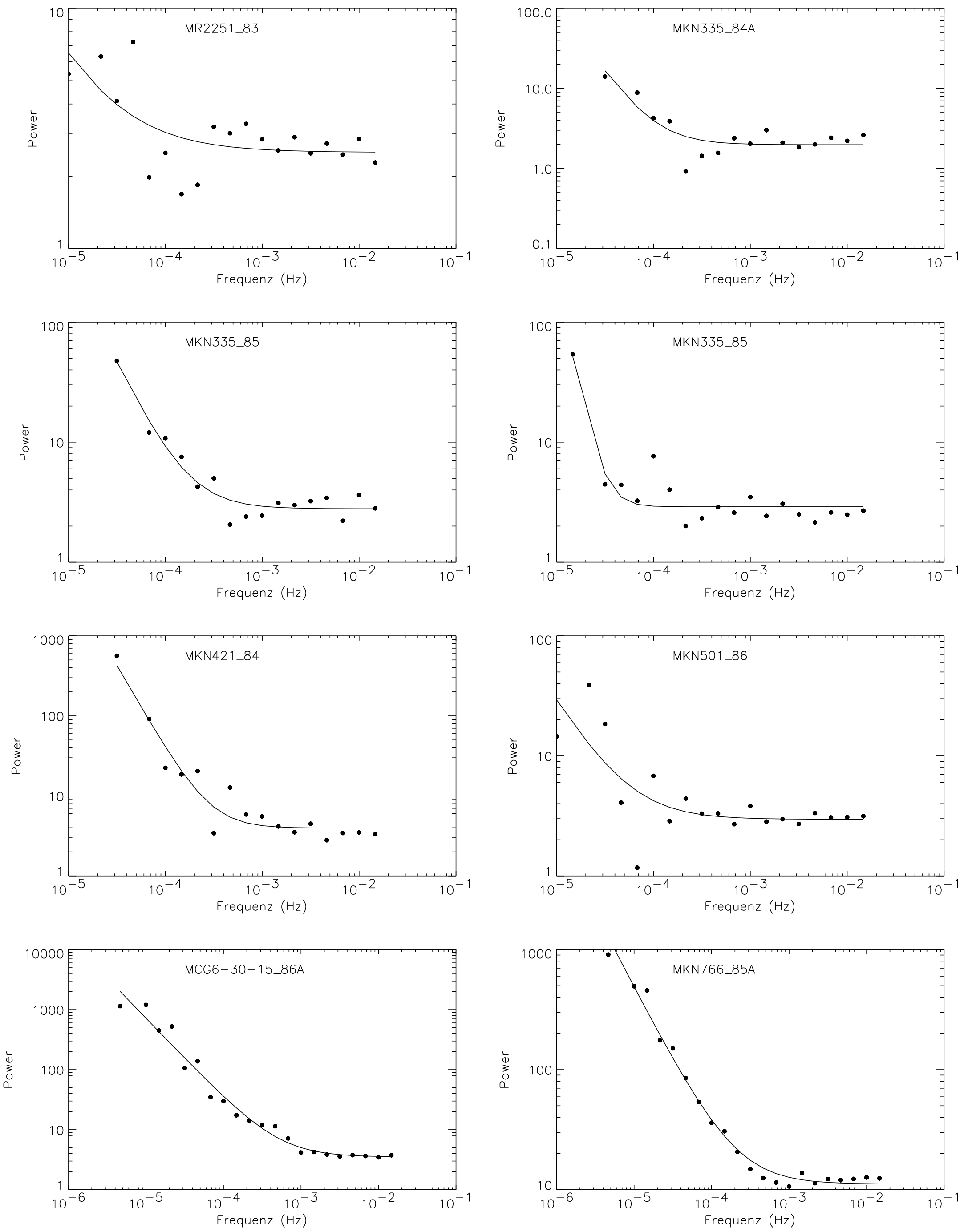


Abbildung B.6: Periodogramme der EXOSAT Röntgenlichtkurven ($1/f^{\alpha}$-Modell).

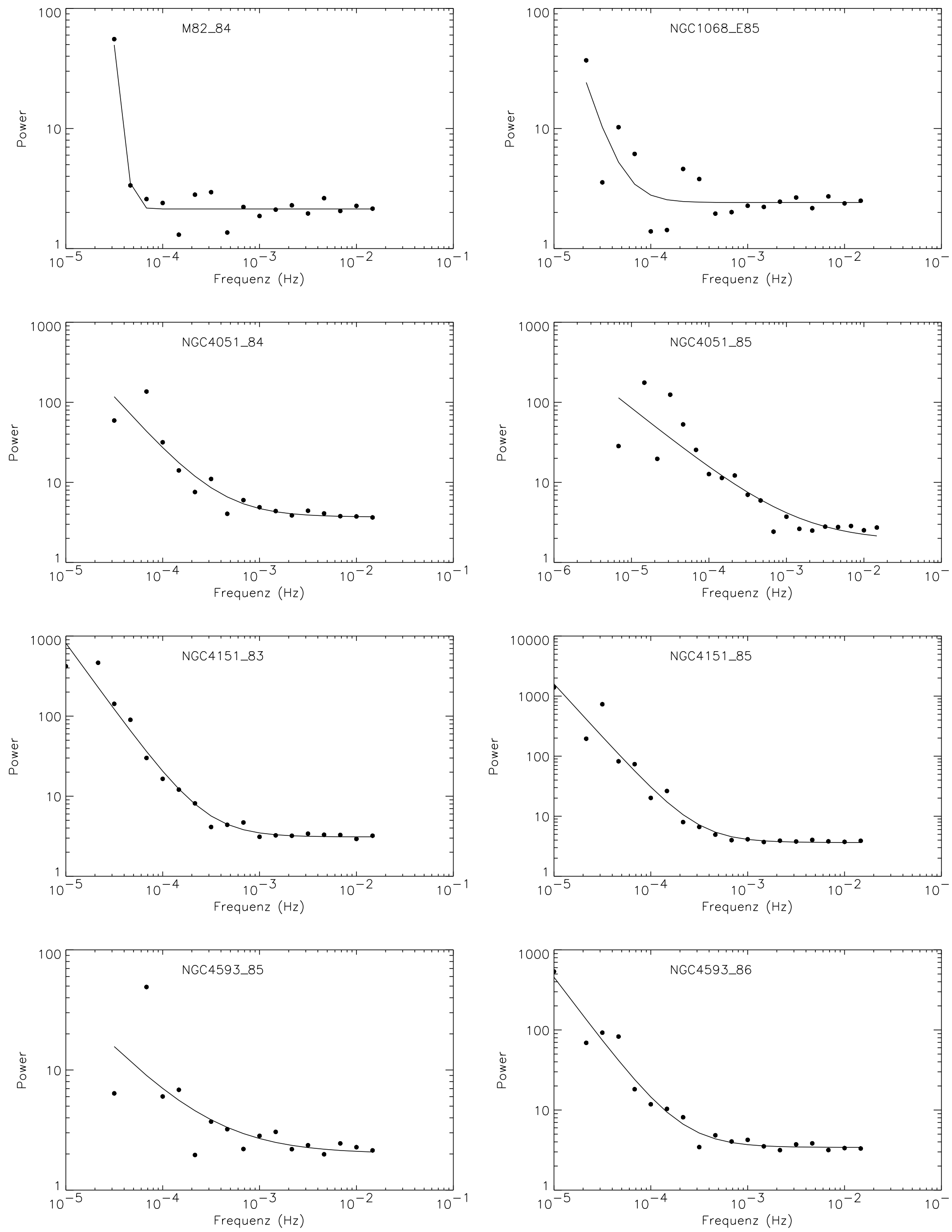
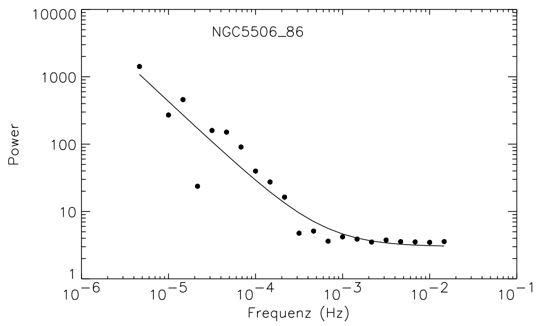
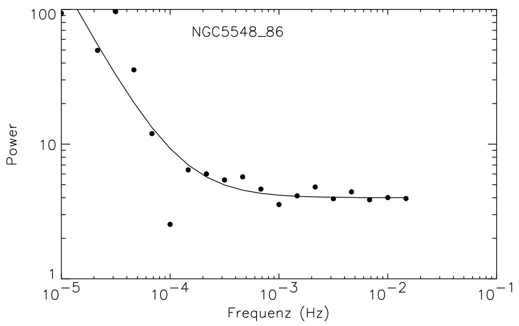


Abbildung B.7: Periodogramme der EXOSAT Röntgenlichtkurven ($1/f^{\alpha}$-Modell).





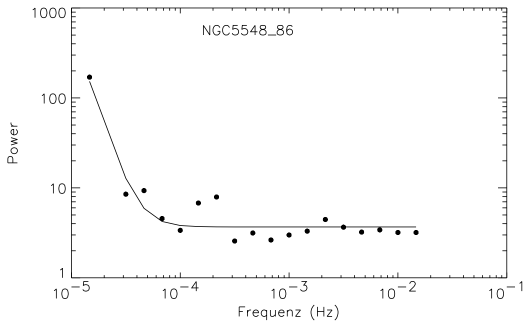


Abbildung B.8: Periodogramme der EXOSAT Röntgenlichtkurven ($1/f^{\alpha}$-Modell).

Anhang C

Langzeitlichtkurve im Röntgenbereich

Durch die Gegebenheiten des Orbits und natürlich durch die Vielfalt des Beobachtungsprogrammes ist es Röntgensatelliten im Prinzip nicht möglich, ununterbrochene Langzeitlichtkurven im Zeitraum von Monaten bis Jahren von Aktiven Galaxien aufzuzeichnen. Zwar gibt es mitunter Kampagnen, die in regelmäßiger Folge, über einige Jahre verteilt, derartige Zeitreihen messen. Durch die hier auftretenden enormen Datenlücken ist es aber oft nicht möglich, diese Daten für eine Zeitreihenanalyse heranzuziehen, da sowohl im Zeitraum (unzureichende Füllinformation) wie auch im Frequenzraum (komplexe Windowfunktion) systematische Effekte die Auswertung verhindern.

Abhilfe schaffen hier sog. *all-sky monitors*, die auf neueren Röntgensatelliten (*Compton Gamma Ray Observatory*, *Rossi X-ray Timing Explorer*) Verwendung finden. Diese Geräte decken mit ihren Gesichtsfeldern meist den gesamten, sichtbaren Himmelsbereich ab, und erlauben so eine instantane Überwachung, um schnell auf Strahlungsausbrüche bekannter wie unbekannter Quellen reagieren zu können. Da das Ortsauflösungsvermögen dieser Detektoren sehr beschränkt ist, kann man die aktuellen Zählraten heller Röntgenquellen nur mittelbar bestimmen: Wird eine helle Quelle (mit bekannten Koordinaten) von der Erde verdeckt, nimmt die detektierte Zählrate ab, und man kann aus der Differenz auf die Röntgenhelligkeit des Objektes schließen. Pro Tag ergeben sich auf diese Art und Weise $10 - 15$ Einzelmessungen, die für helle Quellen Tagesmittelwerte hinreichender Qualität liefern.

Der BATSE Monitor (*Burst and Transient Source Experiment* auf *Compton Gamma Ray Observatory*) besteht aus 8 NaJ-Szintillationszählern, die, an den Ecken des Satelliten angebracht, im Energiebereich von 20 keV bis 1 MeV seit 1991 Tagesmittel der hellsten Röntgenquellen liefern (http://cossc.gsfc.nasa.gov-/cossc).

Die hier gezeigte BATSE Langzeit–Lichtkurve im Röntgenbereich des Qua-

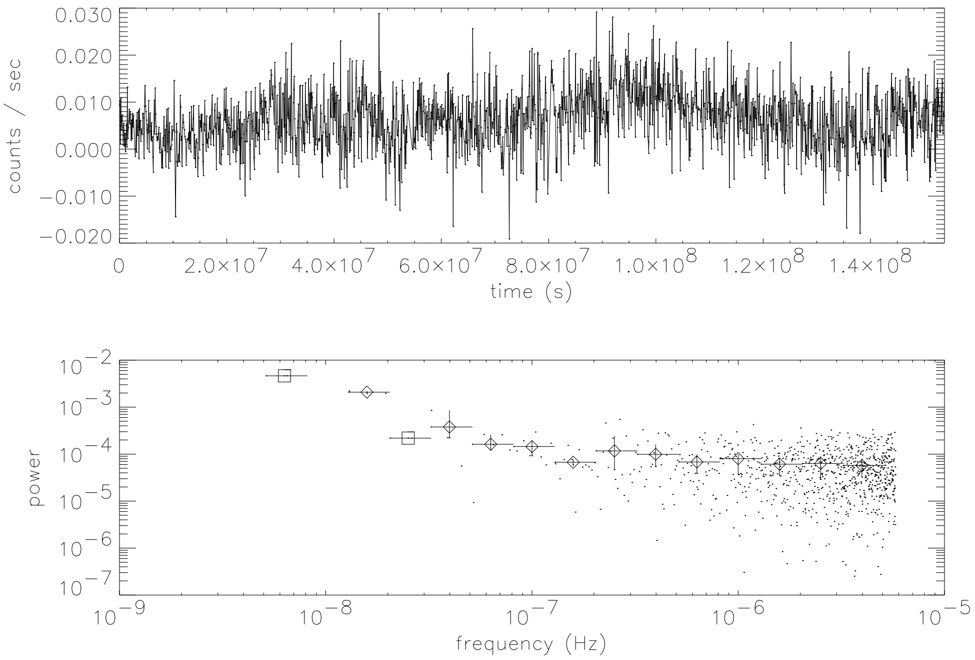


Abbildung C.1: (oben) Röntgenlichtkurve der BATSE Experiments auf dem *Compton Gamma Ray Observatory* des Quasars 3C 273 (TJD 8369–10149). (unten) Periodgramm der beobachteten Lichtkurve.

sars 3C 273 läßt sich, wie schon die Kurzzeit–Lichtkurven, sehr gut durch einen AR[1] Prozess beschreiben. Der zugehörige Relaxator besitzt eine Zerfallszeit von $\tau = 195$ Tagen ($KS_{\mathrm{Test}} = 0.962$). Diese Variationszeitskala liegt im Bereich der viskosen Zeitskala der AGN Akkretionsscheiben (s. Kap. 5.1.3).

Anhang D

Literatur

Antonucci, R., 1993, Unified models for AGN and Quasars, Ann. Rev. Astron. Astrophys., 31, 473

Balbus, S. A., Hawley, J. F., 1991, A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. 1 linear analysis, 2 nonlinear evolution, Astrophys. J., 376, 214

Barr, P., Mushotzky, R. F., 1986, Limits of X-ray variability in AGNs, nature, 320, 421

Barthes, D., 1995, Cleaning power spectra of short, unevenly spaced time series, Astron. Astrophys. Suppl. Ser., 111, 373

Beyer, O., Girlich, H. J., Zschiesche, H. U., 1978, Stochastische Prozesse und Modelle, Leipzig: Harri Deutsch

Blandford, R. D., 1990, Physical processes in AGN, in R. D. Blandford, H. Netzer, L. Woltjer (eds.), Actice Galactic Nuclei, Saas-Fee Advanced Course 20, Berlin Heidelberg: Springer, p. 161

Boller, T., Braadt, W. N., Fabian, A. C., Fink, H. H., 1997, Rosat monitoring of persistent giant and rapid variability in the NLS1 galaxy IRAS 13224-3809, Mon. Not. R. Astron. Soc., in press

Bowyer, S., Lampton, M., Mack, J., 1970, Detection of X-ray emission of 3C 273 and NGC 5128, Astrophys. J., 161, L1

Bradt, H. V. D., Ohashi, T., Pounds, K. A., 1992, X-ray astronomy missions, Ann. Rev. Astron. Astrophys., 30, 391

Bräuer, K., 1996, Analyse Chaotischer Zeitreihen, Vorlesungsskript WS96/97, Universität Tübingen

Bregman, J. N., Glassgold, A. E., Huggins, P. J., et al., 1988, Multifrequency observation of the Optically Violent Variable Quasar 3C 446, Astrophys. J., 331, 746

Brockwell, P. J., Davis, R. A., 1991, Time Series: Theory and Methods, New York, NY: Springer

Buccheri, R., 1992, Search for periodicities in high energy Gamma-ray astronomical data, in E. D. Feigelson, G. J. Babu (eds.), Statistical Challenges in Modern Astronomy I., New York, NY: Springer, p. 381

Burki, G., Maeder, A., Rufener, F., 1978, Variable stars of small amplitude, Astron. Astrophys., 65, 363

Canty, M. J., 1995, Chaos und Systeme, Braunschweig: Vieweg

Carbonell, M., Oliver, R., Ballester, J. L., 1992, Power spectra of gapped time series: a comparison of several amthods, Astron. Astrophys., 264, 350

Casdagli, M., 1992, Applied Chaos - Nonlinear Modeling of chaotic time series: theory and applications, Chapt. 15th, Wiley, Chapt. 15th

Cassidy, I., Raine, D. J., 1996, NGC 4151 – a unified AGN, Astron. Astrophys.

Chatfield, C., 1989, The Analysis of Time Series, London: Chapman and Hall, 4th edition

Czerny, B., Lehto, H. J., 1996, Testing the X-ray variability of active galactic nuclei with the nonlinear prediction method, Mon. Not. R. Astron. Soc.

Davies, S. R., 1990, An improved test for periodicity, Mon. Not. R. Astron. Soc., 244, 93

Deeming, T. J., 1975, Fourier–analysis with unequally spaces data, Astrophys. Space. Sci., 36, 137

Deeter, J. E., 1984, Techniques for the estimation of red power spectra. II. Evaluation of alternative methods, Astrophys. J., 281, 482

Deeter, J. E., Boynton, P. E., 1982, Techniques for the estimation of red power spectra. I. Context and methodology, Astrophys. J., 261, 337

Di Matteo, T., Blackman, E. G., Fabian, A. C., 1997, Two-temperature coronae in AGN, Mon. Not. R. Astron. Soc., in press

Done, C. D., Madejski, G. M., Mushotzky, R. F., Turner, T. J., 1992, The X-ray variability of NGC 6814: Power spectrum, Astrophys. J., 400, 138

Dörrer, T., 1995, Vertikalstruktur und Spektrum von Akkretionsscheiben in Aktiven Galaxien-Kernen, *Ph.D. thesis*, Universität Tübingen

Edelson, R. A., Krolik, J. H., 1988, The discrete correlation function: A new method for analyzing unevenly sampled variability data, Astrophys. J., 333, 646

Fanaroff, B. L., Riley, J. M., 1974, The morphology of extragalactic radio sources of high and low luminosity, Mon. Not. R. Astron. Soc., 167, 31p

Frank, J., King, A., Raine, D., 1992, Accretion Power in Astrophysics, Cambridge Astrophysics Series, 2nd edition

Fuller, W. A., 1996, Introduction to Time Series Analysis, New York, NY: John Wiley and Sons

Gantert, C., 1989, Analyse von Zeitreihen, *Master's thesis*, Universität Freiburg

Gantert, C., 1993, Datenanalyse mit Zustandsraummodellen, *Ph.D. thesis*, Universität Freiburg

Green, A. R., McHardy, I. M., Lehto, H. J., 1993, On the nature of rapid X-ray variability in active galactic nuclei, Mon. Not. R. Astron. Soc., 265, 664

Gregory, P. C., Loredo, T. J., 1992, A new method for the detection of a periodic signal of unknown shape and period, Astrophys. J., 398, 146

Grison, P., 1994, Automatic search for periodic lightcurves with any kind of shape in unevenly sampled data, Astron. Astrophys., 404–410

Haardt, F., Maraschi, L., 1991, A two-phase model for the X-ray emission from Seyfert galaxies, Astrophys. J., 380, L51

Haardt, F., Maraschi, L., Ghisellini, G., 1997, X-ray variability and correlations in the two-phase disk-corona model for Seyfert galaxies, Astrophys. J., 476, 620

Hamilton, D. H., Wu, K. H., 1995, Confidence regions for parameters in the AR(1) model, Journal of Time Series Analysis, 16, 249

Hamilton, J. D., 1994, Time Series Analysis, Princeton, NJ: Princeton University Press

Honerkamp, J., 1994, Stochastic Dynamical Systems, New York, Weinheim: VCH

Horne, J. H., Baliunas, S. L., 1986, A prescription for period analysis of unevenly sampled time series, Astrophys. J., 302, 757

Inoue, H., 1990, Ginga observations of the X-ray spectra of AGN, in Two topics in X-ray astronomy, Vol. SP 296, , ESLAB Symposium, 23rd, ESA, p. 783

Kalinkov, M., Kuneva, I., Tsvetanov, Z., Strigachev, A., 1993, Photometric properties of some AGN, aass, 165–192

Kalman, R. E., 1960, A new approach to linear filtering and prediction problems, Journal Basic Eng., 82, 35

Katz, J. I., 1997, A precessing disk in OJ 287?, Astrophys. J., 478, 527

Kazanas, D., Hua, X., Titarchuk, L., 1997, Temporal and spectral properties of comptonized radiation and its applications, Astrophys. J., 480, in press

Khachikian, E. Y., Weedman, D. W., 1974, An atlas of Seyfert galaxies, Astrophys. J., 192, 581

König, M., 1994, Variabilität in Aktiven Galaxien und Kataklysmischen Veränderlichen am Beispiel der Seyfertgalaxie NGC 6814 und RXJ 1940.1-10.25, *Master's thesis*, Astron. Institut, Universität Tübingen

König, M., Friedrich, S., Staubert, R., Timmer, J., 1997a, The Seyfert galaxy NGC 6814 — a highly variable X-ray source, Astron. Astrophys., 322, 747

König, M., Paunzen, E., Timmer, J., 1997b, On the irregular temporal behaviour of the variable star R Scuti, Astron. Astrophys., submitted

König, M., Staubert, R., Wilms, J., 1997c, Active Galactic Nuclei: correlation between a variability time scale and the hardness of the X-ray spectrum, Astron. Astrophys., accepted

König, M., Timmer, J., 1997, Analyzing X-ray variability by Linear State Space Models, Astron. Astrophys. Suppl. Ser., 124, 589

Krolik, J., Done, C., Madejski, G., 1993, X-ray light curves of AGN are phase incoherent, Astrophys. J., 402, 432

Lawrence, A., Papadakis, I. E., 1993, X-ray variability of active galactic nuclei: a universal power spectrum with luminosity-dependent amplitude, Astrophys. J., 414, L85

Lawrence, A., Watson, M. G., Pounds, K. A., Elvis, M., 1985, Continuous rapid X-ray variability and spectral changes in NGC 4051, Mon. Not. R. Astron. Soc., 217, 685

Leahy, D. A., Darbro, W., Elsner, R. F., et al., 1983a, On searches for pulsed emission with application to four globular cluster X-ray sources, Astrophys. J., 266, 160

Leahy, J. D., Elsner, R. F., Weisskopf, M. C., 1983b, On searches for pulsed emission: the rayleigh test compared to epoche folding, Astrophys. J., 272, 256

Lehto, H., Czerny, B., McHardy, I. M., 1993, AGN X-ray light curves - shot noise or low-dimensional attractor?, Mon. Not. R. Astron. Soc., 261, 125

Lehto, H. J., 1989, A model for 1/f type variability in AGN, in Two Topics in X-ray Astronomy, Vol. SP-296, 23rd ESLAB Symposium, ESA, p. 499

Lightman, A. P., White, T. R., 1988, Effects of cold matter in AGN: a broad hump in X-ray spectra, Astrophys. J., 335, 57

Lomb, N. R., 1976, Least–squares frequency analysis of unequally spaced data, Astrophys. Space. Sci., 39, 447

Madejski, G. M., Done, C., Turner, T. J., 1993, Solving the mystery of the periodicity in NGC 6814, nat, 365, 626

Malaguti, G., Bassani, L., Caroli, E., 1994, High energy spectra of active galactic nuclei. I. The catalog, Astrophys. J., Suppl. Ser., 94, 517

Matsuoka, M., Piro, L., Yamauchi, M., Marakami, T., 1990, X-ray spectral variability and complex absorption in the sy1 galaxies NGC 4051 and MCG-6-30-15, Astrophys. J., 361, 440

McHardy, I., 1985, X-ray timing and spectral observations of AGN, Space Sci. Rev., 40, 559

McHardy, I., Czerny, B., 1987, Fractal X-ray time variability and spectral invariance of the Seyfert galaxy NGC 5506, Nature, 325, 696

McHardy, I. M., 1989, X-ray variability of AGN, in Two Topics in X-ray Astronomy, , 23rd ESLAB Symposium, SP-296, esa, p. 1111

Melcher, H., 1978, Die Relativitätstheorie Einsteins, Aulis Verlag Deubner

Mushotzky, R. F., Done, C., Pounds, K. A., 1993, X-ray spectra and time variability of AGN, Ann. Rev. Astron. Astrophys., 31, 717

Nandra, K., Pounds, K. A., 1994, Ginga observations of X-ray spectra of Seyfert galaxies, Mon. Not. R. Astron. Soc., 268, 405

Nandra, K., Pounds, K. A., Stewart, G. C., 1990, The X-ray spectrum of MCG-6-30-15 and its temporal variability, Mon. Not. R. Astron. Soc., 242, 660

Netzer, H., 1990, AGN emission lines, in R. D. Blandford, H. Netzer, L. Woltjer (eds.), Actice Galactic Nuclei, Saas-Fee Advanced Course 20, Berlin Heidelberg: Springer, p. 57

Nowak, M. A., Vaughan, B. A., 1996, Phase lags and coherence of X-ray variability in black hole candidates, Mon. Not. R. Astron. Soc., 280, 227

Nowak, M. A., Vaughan, B. A., Dove, J., Wilms, J., 1997, Cygnus X-1: A case for a magnetic accretion disk?, in D. Wickramasinghe, L. Ferrario, G. Bicknell (eds.), Accretion Phenomena and Related Outflows, IAU Coll. 163, in press

O'Brien, P., Leighly, K. M., 1997, AGN watch continuum monitoring of radio-quiet and radio-loud AGN, Astrophys. J., in press

Pacholczyk, A. G., Stoeger, W. R., 1994, Active galactic nuclei: V. X-ray variability and the black hole cluster paradigm, Astrophys. J., 434, 435

Papadakis, I. E., Lawrence, A., 1995, A detailed X-ray variability study of the Seyfert galaxy NGC 4051, Mon. Not. R. Astron. Soc., 272, 161

Papoulis, A., 1965, Probability, Random Variables and Stochastic Processes, New York, NY: McGraw Hill

Parma, P., 1992, Jet irregularities, in D. Burgarella, M. Livio, C. O'Dea (eds.), Astrophysical Jets, poster, STSI Symposium, Space Telescope Science Institute, p. 30

Pounds, K. A., 1990, The X-ray spectrum of the broad line Radio Galaxiy 3C 445, Mon. Not. R. Astron. Soc., 242, 20p

Press, W. H., 1978, Flicker noises in astronomy and elsewhere, Comments Astrophys., 7, 103

Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P., 1992, Numerical Recipies in C, University of Cambridge, 2nd edition

Priestley, M. B., 1996, Spectral Analysis and Time Series, San Diego: Academic Press, 9^{th} edition

Pudritz, R. E., Fahlman, G. G., 1982, The structure and variability of dynamo driven accretion discs, Mon. Not. R. Astron. Soc., 198, 689

Roberts, D. H., Lehar, J. L., Dreher, J. W., 1987, Time series analysis with clean. I. Derivation of a spectrum, Astron. J., 93, 968

Rybicki, G. B., Lightman, A. P., 1979, Radiative Processes in Astrophysics, New York: Wiley

Sambruna, R. M., Tagliaferri, P. B. P. G. L. M. G., Treves, A., 1994, The X-ray spectra of blazars observed with EXOSAT, Astrophys. J., 434, 468

Scargle, J. D., 1982, Studies in Astronomical Time Series Analysis. Statistical aspects of spectral analysis of unevenly spaced data, Astrophys. J., 263, 835

Scargle, J. D., 1989, Studies in Astronomical Time Series Analysis. III. Fourier transforms, autocorrelation and cross correaltion functions of unevenly sampled data, Astrophys. J., 343, 874

Schlittgen, R., Streitberg, B. H. J., 1994, Zeitreihenanalyse, München: Oldenburg

Schwarz, U. J., 1978, Mathematical–statistical description of the iterative beam removing technique CLEAN, Astron. Astrophys., 65, 345

Schwarzenberg-Czerny, A., 1991, Accuracy of period determination, Mon. Not. R. Astron. Soc., 253, 198

Sexl, R., Sexl, H., 1985, Weisse Zwerge – Schwarze Löcher, vieweg studium

Shapiro, S. L., Teukolsky, S. A., 1983, Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars, J. Wiley

Sillanpää, A., Haarala, S., Valtonen, M. J., et al., 1988, OJ 287 - binary pair of supermassive black holes, Astrophys. J., 325, 628

Simonetti, J. H., Cordes, J. M., Heeschein, D. S., 1985, Flicker of extragalactic Radio sources at two frequencies, Astrophys. J., 296, 46

Spiegel, M. R., 1990, Fourier–Analysis – Theorie und Anwendung, Hamburg: McGraw Hill

Staubert, R., König, M., Friedrich, S., Lamer, G., 1993, On the newly discovered 3.4h modulated X-ray source RXJ 1940.1-1025 near NGC 6814, Astron. Astrophys., 288, 513

Tennant, A. F., Mushotzky, R. F., Boldt, E. A., 1981, Rapid X-ray variability in the Seyfert galaxy NGC 6814, Astrophys. J., 251, 15

Terell, J., 1967, Luminosity studies and a local model for QSOs, Astrophys. J., 147, 827

Tholine, J. E., Osterbrock, D. E., 1982, On the dynamics of BLR gas in sy 1 galaxies, Astrophys. J., 252, L49

Thorne, K. S., 1994, From black holes to time warps, W.W.Norton & Company

Timmer, J., 1994, Vorverarbeitung, Modellierung und Klassifikation von Zeitreihen, *Ph.D. thesis*, Universität Freiburg, Verlag Harri Deutsch

Timmer, J., 1997, Modelling noisy Time Series, in Vorbereitung

Timmer, J., König, M., 1995, On generating power law noise, Astron. Astrophys., 300, 707

Turner, T. J., Pounds, K. A., 1989, The EXOSAT spectral survey of AGN, Mon. Not. R. Astron. Soc., 240, 833

Urry, C. M., Padovani, P., 1995, Unified schemes for radio-loud Active Galactic Nuclei, Publ. Astron. Soc. Pac., 107, 803

Wagner, S. J., Witzel, A., 1995, Intraday variability in Quasars and BL Lac objects, Ann. Rev. Astron. Astrophys., 33, 163

Wallinder, F. H., Kato, S., Abramowicz, M. A., 1992, Variability of the central region in Active Galactic Nuclei, Astron. Astrophys. Rev., 4, 79

Walter, R., Courvoisier, T. J.-L., 1992, X-ray variability in a sample of Seyfert 1 AGN, Astron. Astrophys., 266, 57

Wandel, A., Boller, T., 1997, BLR sizes in AGN, in D. Levi (ed.), Astronomical Time Series, 25th Anniversary Symposium, Wise Observatory

Wei, W. W. S., 1990, Time Series Analysis, Menlo Park, CA: Addison-Wesley

White, N. E., Peacock, A. P., 1988, X-ray astronomy with EXOSAT, Chapt. 1, 59, N. E. White and R. Pallivicini, Chapt. 1, 59

Wiener, N., 1930, Generalised harmonic analysis, Acta Mathematica, 55, 117

Wiener, N., 1949, The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of stationary Time Series with Engeneering Applications, New York: Technology Press and Wiley

Wilms, J., 1996, Reprozessierung von Röntgenstrahlung in galaktischen und extragalaktischen Röntgenquellen, *Master's thesis*, Universität Tübingen

Winkler, H., Glass, I. S., van Wyk, F., et al., 1992, Variability studies of Seyfert galaxies - broad band photometry, Mon. Not. R. Astron. Soc., 257, 659

Woltjer, L., 1990, Phenomenology of AGN, in R. D. Blandford, H. Netzer, L. Woltjer (eds.), Actice Galactic Nuclei, Saas-Fee Advanced Course 20, Berlin Heidelberg: Springer, p. 1

Yaqoob, T., Warwick, R. S., Pounds, K. A., 1989, Variable X-ray absorbtion in NGC 4151, Mon. Not. R. Astron. Soc., 236, 153

Yule, G. U., 1927, On a method of investigating periodicities in disturbed series, with special reference to Wolfer's sunspot numbers, Phil. Trans. R. Soc., 226, 267

Lebenslauf

2.10.1966	geboren in Aalen als Sohn von Hannelore König (geb. Braun) und Hubert König
Schulausbildung	
1973-1986	Grundschule und Schubart Gymnasium Aalen
Juni 1986	Abitur
Wehrdienst	
Juni 1986 - Oktober 1987	Grundwehrdienst in Neuburg/Do.
Studium	
1987 - 1994	Studium der Physik an der Eberhard-Karls Universität Tübingen
Oktober 1990	Vordiplom (Physik)
Juni 1994	Diplom, Thema: Variabilität in Aktiven Galaxien und kataklysmischen Veränderlichen am Beispiel der Seyfertgalaxie NGC 6814 und RX J1940.1-1025
1994-1997	Promotion, Thema: Zeitvariabilität in Aktiven Galaxien, unter Leitung von Prof.R.Staubert am Institut für Astronomie und Astrophysik, Abt. Astronomie, der Eberhard-Karls Universität Tübingen
Berufliche Tätigkeit	
1992 - 1997	Teilzeitstelle bei Fa. Hewlett Packard, Böblingen

Akademische Lehrer

Meine akademischen Lehrer waren die Professoren und Dozenten:
M. Baumann, H. Clement, H. Fischer, K.-H. Gaukler, F. Gönnenwein, K.H. Hermann, R. Hübener, H. Kaul, H. Lichte, O. Lutz, H. Mauder, H. Müther, H. Pfister, H. Ruder, A. Schwenk, R. Staubert, G. Staudt, H. Stumpf, H.W. Wittern, P. Wolf, H. Zeuner.