Kolloquium Logik und Sprachtheorie
Dr. Reinhard Kahle

Universität Tübingen

Wilhelm-Schickard-Institut

72076 Tübingen, Sand 13,
Telephon 07071-29 74284

Tübingen, den 4. Januar 1999

Vortragsankündigung

Dr. Kai Wehmeier

Universität Münster

Über merkwürdige Eigenschaften der Fregeschen *Grundgesetze der Arithmetik*

Zeit: Dienstag, den 12. Januar 1999, **17 s.t.**

Ort: Sand 13, Raum 107.

Abstact:

Gottlob Freges Hauptwerk, die *Grundgesetze der Arithmetik* von 1893 bzw. 1903, stellen ohne Zweifel einen Meilenstein in der Entwicklung der modernen mathematischen Logik und Grundlagenforschung dar. Leider ist die darin entworfene Theorie aufgrund der Ableitbarkeit (einer Version) der Russellschen Antinomie inkonsistent. In den Beweis des Widerspruchs gehen dabei wesentlich zwei Prinzipien ein: Das Komprehensionsschema der zweiten Stufe und Freges Grundgesetz (V), das wie folgt formuliert werden kann:

$$\hat{x}.F(x) = \hat{x}.G(x) \leftrightarrow \forall x(F(x) \leftrightarrow G(x)),$$

in Worten: Der Umfang des Begriffs F ist identisch mit dem Umfang des Begriffs G genau dann, wenn unter F und G dieselben Gegenstände fallen. Zur Vermeidung von Inkonsistenzen sind daher zwei Strategien denkbar: Einschränkung von Axiom (V) oder Einschränkung der zweitstufigen Komprehension. Da (V) für *gegebene* Begriffsumfänge $\hat{x}.F(x)$ und $\hat{x}.G(x)$ lediglich ein Extensionalitätsaxiom ist und daher kaum aufgegeben werden kann, ohne dem Begriff des Begriffsumfangs bzw. der Menge Gewalt anzutun, läuft eine Beschränkung von (V) darauf hinaus, die zweitstufige Funktion $F \mapsto \hat{x}.F(x)$ als eine echt partielle aufzufassen (dies ist in gewissem Sinne die Strategie der üblichen axiomatischen Mengenlehren). Die zweite Strategie, Einschränkung des Komprehensionsschemas, wurde zuerst von Terence Parsons verfolgt, der Peter Schroeder-Heisters Vermutung bewies, das erststufige Fragment der *Grundgesetze* sei konsistent. Kürzlich hat Richard Heck in Anlehnung an Parsons' Beweis gezeigt, daß das volle Schema (V) mit prädikativer Komprehension verträglich ist. Andererseits ist (V) mit Σ^1_1- bzw. Π^1_1-Komprehension inkonsistent, was Heck zu der Vermutung führte, auch Δ^1_1-Komprehension sei mit (V) unvereinbar.

Im Vortrag werde ich Hecks Vermutung für ein natürliches System T_Δ von Δ^1_1-Komprehension mit Axiom (V) widerlegen. Es zeigt sich jedoch, daß sowohl Hecks prädikatives Fragment H als auch T_Δ merkwürdige Eigenschaften aufweisen. H beweist ohne Verwendung des Komprehensionsschemas, daß es Gegenstände gibt, die keine Begriffsumfänge sind: $\exists x \forall F(x \neq \hat{y}.F(y))$. In T_Δ kann man darüber hinaus ableiten, daß es den Begriff des Begriffsumfangs nicht gibt: $\neg \exists G \forall x(G(x) \leftrightarrow \exists F(x = \hat{y}.F(y))$; insbesondere gibt es hier also unendlich viele Gegenstände, die keine Mengen sind. Diese Resultate geben Anlaß zur Diskussion einiger historischer und systematischer Probleme, etwa des Cäsar-Problems, der Interpretation des Fregeschen Referentialitätsbeweises im §31 der *Grundgesetze*, der Vertretbarkeit eines Logizismus, der die Existenz unendlich vieler nichtlogischer Gegenstände impliziert, und des Satzes von Cantor, nachdem es keine Bijektion zwischen den erst- und den zweitstufigen Objekten eines Bereichs geben kann.