Mathematische Logik I — WS 2016/17

Übungsblatt 8 — **Abgabe am 16.12.** — **T. Piecha**

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ maximal konsistent. Beweisen Sie, dass für alle $\varphi, \psi \in \mathrm{PROP}$ gilt:

$$(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma \iff (\varphi \in \Gamma \text{ und } \psi \in \Gamma).$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Geben Sie für jede der folgenden Aussagen eine geeignete Formelmenge $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ an. Begründen Sie Ihre Antwort jeweils kurz.

(a) Γ hat keine maximal konsistente Erweiterung. (2 Punkte)

(b) Γ hat genau eine maximal konsistente Erweiterung. (2 Punkte)

(c) Γ hat unendlich viele maximal konsistente Erweiterungen. (2 Punkte)

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Eine Formel φ heiße *unabhängig* von der Menge Γ, falls $\Gamma \nvdash \varphi$ und $\Gamma \nvdash \neg\varphi$.
Zeigen Sie, dass die Formel $p_1 \to p_2$ unabhängig von der Menge

$$\{(p_1 \to p_0 \wedge \neg p_2) \wedge (p_0 \wedge \neg p_2 \to p_1),\ p_2 \to p_0\}$$

ist.

Aufgabe 4 (8 Punkte)
Eine Formelmenge Γ heiße *vollständig*, falls für jede Formel φ entweder $\Gamma \vdash \varphi$ oder $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

(a) Zeigen Sie per Induktion über dem Formelaufbau, dass die Menge der Aussagesymbole $\{p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ vollständig ist. (Es sind hierbei ausschließlich Formeln über $\{\bot, \wedge, \to\}$ zu betrachten.) (5 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass Γ genau dann vollständig ist, wenn die Menge $\{\varphi : \Gamma \vdash \varphi\}$ maximal konsistent ist. (3 Punkte)