

Die Menge der primitiv rekursiven Funktionen ist wie folgt definiert:

1. $0 : \mathbb{N}^0 \rightarrow \mathbb{N}$ ist eine primitiv rekursive Funktion.
2. $s : \mathbb{N}^1 \rightarrow \mathbb{N}$ ist eine primitiv rekursive Funktion.
3. Für jedes k und jedes $1 \leq i \leq k$ ist $\pi_i^k : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\pi_i^k(x_1, \dots, x_k) =_{\text{def}} x_i$ eine primitiv rekursive Funktion.
4. Wenn $g_i : \mathbb{N}^l \rightarrow \mathbb{N}$ für $1 \leq i \leq k$ und $h : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ primitiv rekursive Funktionen sind, so auch $h \circ [g_1, \dots, g_k] : \mathbb{N}^l \rightarrow \mathbb{N}$ mit

$$(h \circ [g_1, \dots, g_k])(x_1, \dots, x_l) =_{\text{def}} h(g_1(x_1, \dots, x_l), \dots, g_k(x_1, \dots, x_l))$$

5. Wenn $g : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^{k+2} \rightarrow \mathbb{N}$ primitiv rekursive Funktionen sind, so auch $f : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ mit

$$f(y, x_1, \dots, x_k) =_{\text{def}} \begin{cases} g(x_1, \dots, x_k) & \text{falls } y = 0 \\ h(y, f(y, x_1, \dots, x_k), x_1, \dots, x_k) & \text{falls } y \neq 0 \end{cases}$$

Aufgabe 1 (1+1+2+2 Punkte)

Definieren Sie folgende Funktionen in einem naiven Sinne durch Rekursion:

- (a) $null : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ mit $null(x, y) = 0$
- (b) $fak : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $fak(x) = x!$
- (c) $mult : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ mit $mult(x, y) = x \cdot y$
- (d) $sub : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ mit $sub(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } y > x \\ x - y & \text{falls } y \leq x \end{cases}$

Aufgabe 2 (2+2+3+3 Punkte)

Definieren Sie die Funktionen aus Aufgabe 1 durch Rekursion gemäß des obigen Schemas.

Hinweis: Geben Sie dabei im Falle der Klauseln 4. und 5. ausdrücklich die erwähnten Funktionen g bzw. g_i und h an. Gegebenenfalls müssen zunächst Hilfsfunktionen definiert werden.

Bemerkung: Die Lösungen für Aufgabe 1 und 2 sollen sich dahingehend unterscheiden, daß erstere zumindest nicht dem genannten formalen Schema entsprechen.