# Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik II — Blatt 2

**Prof. Dr. P. Schroeder-Heister** — **SS 2009**

---

## Aufgabe 1

Führen Sie den Beweis der endlichen Modelleigenschaft (Theorem 2.4.12) in allen Einzelheiten durch.

## Aufgabe 2

Zeigen Sie, daß die Formel $\bigvee\{p_i \leftrightarrow p_j \mid 0 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$ nicht intuitionistisch gültig ist. Geben Sie als Gegenmodell entweder ein Modell über der Heytingalgebra aller offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ oder ein Kripke-Modell (oder beides) an.

## Aufgabe 3

Welche der folgenden Formeln sind intuitionistisch gültig?

a) $((p \to q) \to p) \to \neg\neg p$

b) $\neg p \vee \neg q \to \neg(p \wedge q)$

c) $(p \to p \wedge q) \vee (q \to p \wedge q)$

d) $(p \to q \vee r) \to (p \to q) \vee r$

e) $((p \vee \neg p) \to \neg q) \to \neg q$

## Aufgabe 4

Zeigen Sie, daß $\vee$ nicht durch $\wedge$, $\to$ und $\perp$ definierbar ist. Verwenden Sie dazu das Kripke-Modell aus Beispiel 2.5.4 und betrachten Sie die maximale Anzahl der Welten, in denen eine durch $\wedge$, $\to$ und $\perp$ definierbare Formel in diesem Modell wahr ist.

## Aufgabe 5

Zeigen Sie, daß $\vee$, $\wedge$, $\to$ und $\perp$ durch das ternäre Konnektiv $K(\phi, \psi, \sigma)$ definierbar sind, welches durch die *Kusnezow-Formel* gegeben ist:

$$((\phi \vee \psi) \wedge \neg\sigma) \vee (\neg\phi \wedge (\psi \leftrightarrow \sigma))$$