

Philosophische Logik: Ausgewählte Themen

Skript zur Vorlesung
von
Thomas Piecha

Sommersemester 2017
Universität Tübingen
Philosophisches Seminar und
Fachbereich Informatik

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Klassische Aussagenlogik	6
2.1	Syntax	6
2.2	Semantik	8
2.3	Kalkül des natürlichen Schließens	11
3	Intuitionistische Logik	16
3.1	Schwache Gegenbeispiele	16
3.2	Die BHK-Interpretation	17
3.3	Kalkül des natürlichen Schließens	18
3.4	Ableitbarkeit und Zulässigkeit von Regeln	21
3.5	Normalisierbarkeit und Eigenschaften von NI	24
3.6	Verhältnis von klassischer zu minimaler und intuitionistischer Logik	28
3.7	Kripke-Semantik für die intuitionistische Logik	32
3.8	Rückblick	38
4	Modale Aussagenlogik	39
4.1	Vorbemerkungen	39
4.2	Syntax und Semantik der modalen Aussagenlogik	40
4.3	Logische Folgerung	44
4.4	Einige Standardmodallogiken	46
4.5	Modallogische Hilberttypkalküle	50
4.5.1	Hilberttypkalkül für K	50
4.5.2	Hilberttypkalküle für Standardmodallogiken	52
4.6	Modallogische Tableauekalküle	53
4.6.1	Aussagenlogische analytische Tableaux	53
4.6.2	Modallogische Tableaux für K	55
4.6.3	Tableauekalküle für Standardmodallogiken	58
4.6.4	Tableaux mit Annahmen	59
5	Modale Quantorenlogik	61
5.1	Syntax der klassischen Quantorenlogik	61
5.2	Semantik der klassischen Quantorenlogik	62
5.3	Klassische quantorenlogische Tableaux	64
5.4	Modale quantorenlogische Tableaux	66
5.4.1	Tableaux für konstante Gegenstandsbereiche	66
5.4.2	Tableaux für variierende Gegenstandsbereiche	67
5.5	<i>De re</i> und <i>de dicto</i>	68
5.6	Semantik für konstante Gegenstandsbereiche	69
5.7	Semantik für variierende Gegenstandsbereiche	72
5.8	Verhältnis von possibilistischer und aktualistischer Quantifikation	75
5.8.1	Barcansche Formeln und aktualistische Quantifikation	75
5.8.2	Existenzrelativierung und possibilistische Quantifikation	77
5.9	Designatoren	78
Anhang A	Verwendung von Annahmen in Hilberttypkalkülen	83

Anhang B Korrektheit und Vollständigkeit quantorenlogischer Tableaux	86
B.1 Korrektheit	87
B.2 Vollständigkeit	87
Literatur	93
Sachverzeichnis	95

1 Einleitung

In dieser Vorlesung werden verschiedene philosophische Logiken behandelt. Dies sind im wesentlichen Logiken, die in Bezug auf philosophische Probleme eine Rolle spielen. Einen Überblick über eine Vielzahl von philosophischen Logiken bieten z. B. die Sammelbände

- D. Jacquette (Hrsg.) (2002), *A Companion to Philosophical Logic*. Oxford: Blackwell.
- L. Goble (Hrsg.) (2001), *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*. Oxford: Blackwell.

Hauptthemen der Vorlesung sind die intuitionistische Logik und verschiedene Modallogiken. Es werden unter anderem folgende Quellen verwendet (weitere finden sich im Literaturverzeichnis):

- M. Dummett (2000), *Elements of Intuitionism*, 2nd edition. Oxford: Clarendon Press.
- A. Troelstra & D. van Dalen (1988), *Constructivism in Mathematics. An Introduction*, Vol. I. Amsterdam: North-Holland.
- M. Fitting & R. L. Mendelsohn (1998), *First-Order Modal Logic*. Dordrecht: Kluwer.
- G. E. Hughes & M. J. Cresswell (1996), *A New Introduction to Modal Logic*. London: Routledge.

In Teilen orientiert sich die Vorlesung auch an Vorlesungen von P. Schroeder-Heister. Es wird darauf verzichtet, jede Verwendung dieser Quellen immer kenntlich zu machen.

Wir beginnen mit einer Wiederholung zur klassischen Aussagenlogik. Dabei weisen wir auch auf mögliche Modifikationen der klassischen Logik hin, die zu verschiedenen philosophischen Logiken führen.

2 Klassische Aussagenlogik

2.1 Syntax

Definition 2.1 Das *Alphabet der Sprache der Aussagenlogik* besteht aus folgenden Zeichen: *Alphabet*

- (i) *Aussagesymbole (Aussagevariablen)*: p, q, r, \dots , auch mit Indizes: p_0, p_1, p_2, \dots .
Es sei $AS = \{p, q, r, \dots\}$ die *Menge der Aussagesymbole* (bzw. *der Aussagevariablen*).
- (ii) *Konnektive (Junktoren, logische Konstanten)*: \top (Verum), \perp (Falsum), \neg (Negation), \wedge (Konjunktion), \vee (Disjunktion) und \rightarrow (Implikation).
- (iii) Klammern: $(,)$

Definition 2.2 Die (*aussagenlogischen*) *Formeln* über $AS = \{p, q, r, \dots\}$ sind wie folgt definiert: *Formeln*

- (i) Jedes Aussagesymbol in AS ist eine Formel. \top und \perp sind ebenfalls Formeln.
- (ii) Wenn A eine Formel ist, dann auch $\neg A$.
- (iii) Wenn A und B Formeln sind, dann auch $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ und $(A \rightarrow B)$.

Die *Sprache der Aussagenlogik* ist die Menge aller (aussagenlogischen) Formeln. Diese Menge bezeichnen wir auch mit $FORMEL$. *Sprache der Aussagenlogik*

Beispiel. Der Ausdruck $((p_0 \wedge \neg p_1) \vee p_2) \rightarrow p_3$ ist eine aussagenlogische Formel.

Wir fassen die Klauseln (i)-(iii) als Regeln zur Erzeugung von Formeln auf, so dass Formeln genau die mit diesen Regeln erzeugbaren Ausdrücke sind. Wir verzichten daher auf die weitere Bedingung, dass nichts sonst eine Formel sei, oder dass die Menge der Formeln gemäß (i)-(iii) die kleinste derartige Menge sei. (Wir werden das so auch bei anderen Definitionen entsprechender Form handhaben.)

Bemerkungen. (i) Die Sprache der Aussagenlogik ist unsere *Objektsprache*. In ihr kommen ausschließlich Zeichen des Alphabets gemäß Definition 2.1 vor. Wir verwenden A, B, C, \dots (ggf. mit Indizes) als *metasprachliche Variablen* für in der Objektsprache ausgedrückte Formeln.

- (ii) Die Aussagesymbole werden auch als *atomare Formeln*, kurz: *Atome*, bezeichnet. Ebenso \top und \perp .
- (iii) Nicht-atomare Formeln heißen *komplex*.
- (iv) Aussagenlogische Formeln werden im Folgenden auch einfach als "Aussagen" bezeichnet.

Bemerkung. Es gelten folgende Regeln zur *Klammerersparnis*: *Klammerersparnis*

- (i) Außenklammern können weggelassen werden.
- (ii) Klammern können aufgrund folgender *Bindungsstärken* der logischen Konstanten *Bindungsstärke* eingespart werden: \neg bindet am stärksten, \wedge und \vee binden stärker als \rightarrow .
- (iii) Wir verwenden Linksklammerung.

Beispiel. Die Formel mit Klammerersparnis $A \wedge B \wedge C \wedge D \rightarrow A \vee B \vee C \vee D$ steht für die Formel $((((A \wedge B) \wedge C) \wedge D) \rightarrow (((A \vee B) \vee C) \vee D))$. Die beiden Ausdrücke werden als syntaktisch gleich aufgefasst.

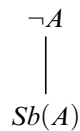
Wir verwenden das metasprachliche Zeichen \equiv für die *syntaktische Gleichheit* von Formeln. Es bedeutet z. B. $A \equiv (B \rightarrow C)$, dass die Formel A die Form $(B \rightarrow C)$ hat. Des Weiteren verwenden wir das metasprachliche Zeichen \iff als Abkürzung für “genau dann, wenn”.

Definition 2.3 Die Erzeugung von Formeln kann als *Strukturbaum* dargestellt werden. Dieser ist rekursiv definiert wie folgt:

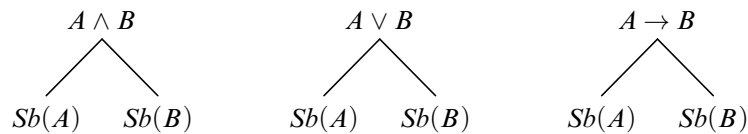
- (i) Der Strukturbaum $Sb(A)$ einer atomaren Formel A ist der Knoten

A

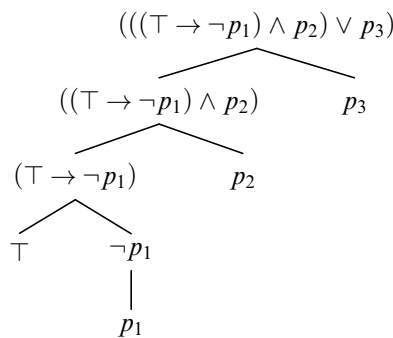
- (ii) Der Strukturbaum $Sb(\neg A)$ einer negierten Formel $\neg A$ ist



- (iii) Die Strukturbäume $Sb(A \wedge B)$, $Sb(A \vee B)$, bzw. $Sb(A \rightarrow B)$ von Formeln $A \wedge B$, $A \vee B$, bzw. $A \rightarrow B$ sind



Beispiel. Der Strukturbaum der Formel $(((\top \rightarrow \neg p_1) \wedge p_2) \vee p_3)$ ist:



- Definition 2.4** (i) A ist *unmittelbare Teilformel* von $\neg A$. *unmittelbare Teilformel*
(ii) A und B sind *unmittelbare Teilformeln* von $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ und $(A \leftrightarrow B)$. *Teilformel*
(iii) A ist *Teilformel* von B , falls A und B identisch sind, oder A Teilformel einer unmittelbaren Teilformel von B ist. *Teilformel*

Bemerkungen. (i) Im Strukturbaum von A sind die unmittelbaren Teilformeln von A die direkt auf den Wurzelknoten folgenden Knoten. Die Teilformeln von A sind die Knoten, einschließlich des Wurzelknotens.

(ii) Teilformeln A von B , die nicht identisch mit B sind, bezeichnet man auch als *echte Teilformeln* von B . *echte Teilformel*

Definition 2.5 Das *Hauptkonnektiv* einer Formel A ist das bei der Erzeugung von A zuletzt eingeführte Konnektiv. (Im Strukturbaum von A ist dies das nur im Wurzelknoten vorkommende Konnektiv.) *Hauptkonnektiv*

Durch die Festlegung der Syntax als formale Sprache kann diese mathematisch behandelt werden. Es ergibt sich jedoch gegenüber der natürlichen Sprache eine Einschränkung der Ausdrucksstärke. Viele philosophische Logiken sind durch Spracherweiterungen gekennzeichnet.

2.2 Semantik

In der Semantik werden zunächst den Aussagesymbolen Wahrheitswerte zugeordnet (durch eine Bewertung h), und die Bedeutung der logischen Konstanten \top , \perp , \neg , \wedge , \vee und \rightarrow wird durch Funktionen von Wahrheitswerten festgelegt.

Definition 2.6 Eine *Bewertung* h ist eine Funktion, die jedem Aussagesymbol aus AS einen der Wahrheitswerte w oder f zuordnet, d. h. $h : AS \rightarrow \{w, f\}$. Für $A \in AS$ heißt A *wahr unter h* , falls $h(A) = w$, und *falsch unter h* , falls $h(A) = f$. *Bewertung*

Definition 2.7 Durch eine Funktion $\llbracket \cdot \rrbracket^h : FORMEL \rightarrow \{w, f\}$ wird jeder Formel über AS ein Wahrheitswert w oder f zugeordnet. Der *Wahrheitswert* $\llbracket A \rrbracket^h$ einer Formel A unter der Bewertung h ist wie folgt über dem Aufbau von Formeln definiert: *Wahrheitswert*

Für Aussagesymbole $A \in AS$:

$$\llbracket A \rrbracket^h := \begin{cases} w & \text{falls } h(A) = w, \\ f & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die übrigen aussagenlogischen Formeln:

$$\llbracket \top \rrbracket^h := w$$

$$\llbracket \perp \rrbracket^h := f$$

$$\llbracket \neg A \rrbracket^h := \begin{cases} w & \text{falls } \llbracket A \rrbracket^h = f, \\ f & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\llbracket A \wedge B \rrbracket^h := \begin{cases} w & \text{falls } \llbracket A \rrbracket^h = w \text{ und } \llbracket B \rrbracket^h = w, \\ f & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\llbracket A \vee B \rrbracket^h := \begin{cases} w & \text{falls } \llbracket A \rrbracket^h = w \text{ oder } \llbracket B \rrbracket^h = w, \\ f & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\llbracket A \rightarrow B \rrbracket^h := \begin{cases} w & \text{falls } \llbracket A \rrbracket^h = f \text{ oder } \llbracket B \rrbracket^h = w, \\ f & \text{sonst.} \end{cases}$$

Entsprechender Ausdruck der Wahrheitswertabhängigkeit durch Wahrheitstafeln:

<i>Negation</i>		<i>Konjunktion</i>			<i>Disjunktion</i>			<i>Implikation</i>		
<i>A</i>	$\neg A$	<i>A</i>	<i>B</i>	$A \wedge B$	<i>A</i>	<i>B</i>	$A \vee B$	<i>A</i>	<i>B</i>	$A \rightarrow B$
w	f	w	w	w	w	w	w	w	w	w
f	w	w	f	f	w	f	w	w	f	f
		f	w	f	f	w	w	f	w	w
		f	f	f	f	f	f	f	f	w

Für das *Verum*: $\frac{\top}{w}$, und für das *Falsum*: $\frac{\perp}{f}$.

Alle weiteren aussagenlogischen Konnektive (beliebiger Stelligkeit) können durch die angegebenen ausgedrückt werden (*funktionale Vollständigkeit*).

Zum Beispiel kann die Biimplikation $A \leftrightarrow B$, wobei

$$\llbracket A \leftrightarrow B \rrbracket^h := \begin{cases} w & \text{falls } \llbracket A \rrbracket^h = \llbracket B \rrbracket^h, \\ f & \text{sonst,} \end{cases}$$

durch $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ ausgedrückt werden.

Definition 2.8 Alternativ kann die Semantik der Aussagenlogik durch Definition der Relation $h \models A$ (“*A* gilt in *h*”, “*A* ist wahr unter *h*”), bzw. $h \not\models A$ (“in *h* gilt *A* nicht”, “*A* gilt in *h* ist falsch unter *h*”) wie folgt angegeben werden:

Für Aussagesymbole $A \in \text{AS}$:

$$h \models A \iff h(A) = w$$

(Entsprechend sei $h \not\models A \iff h(A) = f$.)

Für die übrigen aussagenlogischen Formeln:

$$h \models \top$$

$$h \not\models \perp$$

$$h \models \neg A \iff h \not\models A$$

$$h \models A \wedge B \iff h \models A \text{ und } h \models B$$

$$h \models A \vee B \iff h \models A \text{ oder } h \models B$$

$$h \models A \rightarrow B \iff h \not\models A \text{ oder } h \models B$$

$$\iff \text{Wenn } h \models A, \text{ dann } h \models B$$

Definition 2.9 (i) *A* heißt *allgemeingültig* (oder *tautologisch*), falls *A* unter allen Bewertungen wahr ist (d. h. falls $h \models A$ für alle *h* gilt). Schreibweise: $\models A$. *allgemeingültig*

(ii) *A* heißt *erfüllbar* (oder *konsistent*), falls *A* unter mindestens einer Bewertung wahr ist (d. h. falls es eine Bewertung *h* gibt, so dass $h \models A$). *erfüllbar*

(iii) *A* heißt *unerfüllbar* (oder *inkonsistent* oder *kontradiktorisch*), falls *A* unter keiner Bewertung wahr ist (d. h. falls $h \not\models A$ für alle *h* gilt). *unerfüllbar*

(iv) *A* heißt *kontingent*, falls *A* weder allgemeingültig noch unerfüllbar ist. *kontingent*

Für Formelmengen Γ bedeutet $h \models \Gamma$, dass $h \models A$ für alle Formeln $A \in \Gamma$.

Definition 2.10 Die (aussagen-)logische Folgerung einer Formel A aus einer Formelmenge Γ ist wie folgt definiert: logische Folgerung

$$\Gamma \models A \text{ :} \iff \text{Für alle Bewertungen } h: \text{ wenn } h \models \Gamma, \text{ dann } h \models A$$

(Man sagt auch: Γ impliziert (logisch) A . Die Formeln in Γ heißen in diesem Zusammenhang *Prämissen*, und die Formel A heißt *Konklusion*.)

Zwei Formeln A und B heißen *logisch äquivalent*, falls $A \models B$ und $B \models A$ (kurz: $A \equiv B$). logisch äquivalent

Man spricht bei diesem Begriff von logischer Folgerung auch von *Wahrheitskonservierung*, da gefordert wird, dass die Wahrheit (bzw. Gültigkeit) der Prämissen Γ bei der Konklusion A erhalten bleibt.

In gewissen konstruktivistischen Ansätzen zur Logik wird logische Folgerung hingegen durch die Forderung erklärt, dass es für jeden Beweis der Prämissen Γ eine Konstruktion (d. h. ein bestimmtes Verfahren) geben muss, die einen Beweis der Konklusion A erzeugt. Darauf werden wir bei der Behandlung der Semantik der *intuitionistischen Logik* näher eingehen.

Bemerkung. Wir verwenden das Zeichen “ \models ” sowohl für die Gültigkeitsrelation $h \models A$, bzw. $h \models \Gamma$, als auch für die logische Folgerung ($\Gamma \models A$). Die jeweilige Bedeutung ist aber durch den Bezug auf eine Bewertung h bzw. auf eine Formelmenge Γ eindeutig. Ist $\Gamma = \emptyset$, schreiben wir $\models A$, was die Allgemeingültigkeit von A ausdrückt.

Beispiele. Überprüfung der logischen Folgerung unter Verwendung von Wahrheitstafeln:

(i) Gilt die Folgerungsbehauptung $p \vee q, \neg p \models q$?

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	\models	q
w	w	w	f		w
w	f	w	f		f
→ f	w	w	w	✓	w
f	f	f	w		f

Es gibt nur eine Bewertung, unter der alle Prämissen wahr sind (dritte Zeile). Unter dieser Bewertung ist auch die Konklusion q wahr. Die Konklusion q ist also unter allen Bewertungen wahr, unter denen auch die Prämissen $p \vee q, \neg p$ wahr sind. Somit gilt $p \vee q, \neg p \models q$.

(ii) Gilt die Folgerungsbehauptung $p \vee q, p \models q$?

p	q	$p \vee q$	p	\models	q
→ w	w	w	w	✓	w
→ w	f	w	w	✗	f
f	w	w	f		w
f	f	f	f		f

Es gibt zwei Bewertungen, unter denen alle Prämissen wahr sind (erste und zweite Zeile). Allerdings ist die Konklusion q unter der zweiten Bewertung falsch. Es ist also $p \vee q, p \not\models q$, d. h. $p \vee q, p \models q$ gilt nicht.

Es gilt das Import-Export-Theorem: $\Gamma, A \models B \iff \Gamma \models A \rightarrow B$. Für $\Gamma = \emptyset$ ist der Nachweis von $A \models B$ somit äquivalent zum Nachweis der Allgemeingültigkeit von $A \rightarrow B$.

Bemerkungen. (i) In der klassischen Logik werden lediglich zwei Wahrheitswerte verwendet (*Bivalenzprinzip*): w und f.

Bewertungen können natürlich auch für mehr als zwei Wahrheitswerte definiert werden. Dies führt zu den *mehrwertigen Logiken*.

(ii) In der angegebenen Semantik für aussagenlogische Formeln werden Aussagesymbole durch die Wahrheitswerte w oder f interpretiert. Die Semantik ist somit nur auf Formeln anwendbar, die aus atomaren Formeln zusammengesetzt sind, die einen Wahrheitswert haben (*Wahrheitsdefinitheit*).

Dies kann zu Problemen z. B. bei der Behandlung der Implikation führen. In bestimmten *nicht-klassischen Logiken* wird auf die Forderung nach Wahrheitsdefinitheit verzichtet.

(iii) Die Semantik legt fest, dass der Wahrheitswert einer komplexen Formel eine Funktion der Wahrheitswerte ihrer Teilformeln ist (*Wahrheitsfunktionalität*). Dies ist ebenfalls eine Einschränkung.

Sei z. B. A die Aussage “Jeder Gegenstand ist mit sich selbst identisch” und B die Aussage “Tübingen liegt am Neckar”. Sowohl A als auch B sind wahr. Jedoch ist die Aussage “Es ist notwendig, dass A ” wahr, während die Aussage “Es ist notwendig, dass B ” falsch ist. “Es ist notwendig, dass” ist also kein wahrheitsfunktionaler Operator, der im Rahmen der aussagenlogischen Semantik behandelt werden könnte.

In *Modallogiken* wird diese Einschränkung nicht gemacht.

Neben der Semantik spielen Kalküle eine Rolle. Sie gestatten das Ableiten von Aussagen aus Axiomen oder Annahmen mittels Regeln. Im Unterschied zur logischen Folgerung im semantischen Sinne gibt das regelbasierte Schließen die Form tatsächlicher Argumentationen genauer wieder. Dies ist insbesondere beim Kalkül des natürlichen Schließens der Fall.

2.3 Kalkül des natürlichen Schließens

Es werden keine Axiome, sondern nur Annahmen verwendet. Die Abhängigkeit von Annahmen kann gelöscht werden: In der Ableitung

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} \text{ (Implikationseinführung)}$$

ist die Prämisse B der Implikationseinführung noch von der Annahme A abhängig, während die Konklusion $A \rightarrow B$ nicht mehr von A abhängt.

Definition 2.11 (i) Der Kalkül NK des natürlichen Schließens (für klassische Logik) ist durch folgende Regeln gegeben: *Kalkül NK*

<i>Einführungsregel</i>	<i>Beseitigungsregel</i>
$\frac{A_1 \quad A_2}{A_1 \wedge A_2} (\wedge E)$	$\frac{A_1 \wedge A_2}{A_i} (\wedge B) \quad (i = 1 \text{ oder } 2)$

$$\frac{A_i}{A_1 \vee A_2} (\vee E) \quad (i = 1 \text{ oder } 2) \qquad \frac{A_1 \vee A_2 \quad \frac{[A_1] \quad [A_2]}{C} (\vee B)}{C} (\vee B)$$

$$\frac{[A]}{A \rightarrow B} (\rightarrow E) \qquad \frac{A \rightarrow B \quad A}{B} (\rightarrow B)$$

Widerspruchsregel

$$\frac{[\neg A]}{\perp} (\perp)_c$$

- (ii) Die Definition von *Ableitung* (und damit zusammenhängender Begriffe) übernehmen wir direkt aus der *Einführung in die Logik* (siehe [Piecha, 2015](#)).
- (iii) Aus Γ ist A *ableitbar in NK* (Notation: $\Gamma \vdash_{NK} A$), falls es eine Ableitung mit Endformel A aus Annahmen in Γ gibt. *ableitbar in NK*
- (iv) Eine Formel A heißt *beweisbar in NK* (Notation: $\vdash_{NK} A$), falls es eine Ableitung mit Endformel A ohne offene Annahmen gibt. *beweisbar in NK*

Bemerkungen. (i) Wir verwenden $\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots$ oder auch $\dot{}$ als Platzhalter für Ableitungen.

- (ii) Wir verwenden die Notation

$$\frac{\mathcal{D}}{A}$$

um auszudrücken, dass wir eine Ableitung \mathcal{D} mit Endformel A haben; und wir schreiben

$$\frac{[A]}{\frac{\mathcal{D}}{B}}$$

um auszudrücken, dass in der Ableitung \mathcal{D} mit Endformel B Annahmen A vorkommen können.

- (iii) Wir verwenden keine zusätzlichen Regeln für die Negation, sondern verstehen negierte Formeln $\neg A$ als Abkürzung für $A \rightarrow \perp$. Es ist dann z. B.

$$\frac{\neg A \quad A}{\perp} (\rightarrow B)$$

eine korrekte Anwendung der Implikationsbeseitigungsregel, und

$$\frac{[A]^n}{\frac{\perp}{\neg A}} (\rightarrow E)^n$$

ist ein Beispiel für eine korrekte Anwendung der Implikationseinführungsregel.

- (iv) Wir verzichten auch auf Regeln für das Verum \top , das wir z. B. durch $\perp \rightarrow \perp$ definieren können.

Beispiel. Wir zeigen $A \rightarrow B \vdash_{\text{NK}} \neg A \vee B$ durch Angabe einer Ableitung im Kalkül NK:

$$\frac{\frac{\frac{A \rightarrow B}{\neg(\neg A \vee B)} \quad \frac{\frac{B}{\neg A \vee B} (\vee E)}{\neg A \vee B} (\rightarrow B)}{\frac{\perp}{\neg A \vee B} (\perp)_c^1} \quad \frac{[\neg(\neg A \vee B)]^2 \quad \frac{[\neg A]^1}{\neg A \vee B} (\vee E)}{\neg A \vee B} (\rightarrow B)}{\frac{\perp}{\neg A \vee B} (\perp)_c^2}$$

Die Einführungsregeln geben an, wie von Aussagen auf eine komplexere Aussage, die eine bestimmte zusätzliche logische Konstante enthält, geschlossen werden darf. Die Beseitigungsregeln geben an, was aus einer komplexen Aussage (ggf. unter Verwendung weiterer Aussagen) geschlossen werden kann.

Die Regeln legen somit den Gebrauch der logischen Konstanten fest. Zum Verhältnis von Einführungs- und Beseitigungsregeln bemerkt [Gentzen \(1935, S. 189\)](#):

Die Einführungen stellen sozusagen die „Definitionen“ der betreffenden Zeichen dar, und die Beseitigungen sind letzten Endes nur Konsequenzen hiervon, was sich etwa so ausdrücken läßt: Bei der Beseitigung eines Zeichens darf die betreffende Formel, um deren äußerstes Zeichen [d. h. das Hauptkonnektiv] es sich handelt, nur „als das benutzt werden, was sie auf Grund der Einführung dieses Zeichens bedeutet“.

Die hier formulierte Bedingung ist bei folgendem Regelpaar verletzt ($i = 1$ oder 2):

$$\frac{A_i}{A_1 \text{ tonk } A_2} (\text{tonk E}) \qquad \frac{A_1 \text{ tonk } A_2}{A_i} (\text{tonk B})$$

Aufgrund der Einführungsregel hat das Konnektiv tonk die Bedeutung der Disjunktion. Die Beseitigungsregel gestattet es jedoch, die Formel $A_1 \text{ tonk } A_2$ als Konjunktion zu benutzen. Dadurch lassen sich aus beliebigen Annahmen A beliebige Aussagen B ableiten:

$$\frac{\frac{A}{A \text{ tonk } B} (\text{tonk E})}{B} (\text{tonk B})$$

Eine Präzisierung der Bemerkung von Gentzen stellt das von [Prawitz \(1965, S. 33\)](#) formulierte *Inversionsprinzip* dar:

Inversionsprinzip

Let α be an application of an elimination rule that has B as consequence. Then, deductions that satisfy the sufficient condition [. . .] for deriving the major premiss of α , when combined with deductions of the minor premisses of α (if any), already “contain” a deduction of B ; the deduction of B is thus obtainable directly from the given deductions without the addition of α .

Die hinreichenden Bedingungen sind dabei durch die Prämissen der entsprechenden Einführungsregeln gegeben. Das Inversionsprinzip sagt dann, dass man eine Ableitung der Konklusion einer Beseitigungsregel ohne die Anwendung dieser Beseitigungsregel erhalten kann, wenn die Hauptprämisse dieser Beseitigungsregel im letzten Schritt mit einer Einführungsregel abgeleitet wurde.

Beispiel. In der Ableitung

$$\frac{\frac{[A]}{\mathcal{D}} \frac{B}{A \rightarrow B} (\rightarrow E)}{B} \quad \frac{\mathcal{D}'}{A} (\rightarrow B)$$

wird die Hauptprämisse $A \rightarrow B$ von $(\rightarrow B)$ im letzten Schritt mit $(\rightarrow E)$ abgeleitet. Nach dem Inversionsprinzip kann die Konklusion B der Beseitigungsregel $(\rightarrow B)$ dann auch ohne $(\rightarrow B)$ abgeleitet werden:

$$\frac{\mathcal{D}'}{A} \frac{\mathcal{D}}{B}$$

(Falls in \mathcal{D} keine Annahmen A vorkommen, erhält man $\frac{\mathcal{D}}{B}$.)

Im Allgemeinen besagt das Inversionsprinzip, dass Ableitungen der Form

$$\frac{\frac{\mathcal{D}_1 \quad \mathcal{D}_2}{A} \text{ E-Regel}}{B} \quad \frac{\mathcal{D}_3 \quad \mathcal{D}_4}{B} \text{ B-Regel}$$

in denen die Konklusion einer Einführungsregel (E-Regel) zugleich Hauptprämisse der entsprechenden Beseitigungsregel (B-Regel) ist, vermieden werden können (wobei \mathcal{D}_2 , \mathcal{D}_3 und \mathcal{D}_4 je nach Regel auch fehlen können).

Im Fall von tonk wird das Inversionsprinzip verletzt, da wir bei

$$\frac{\frac{\mathcal{D}}{A} \text{ (tonk E)}}{A \text{ tonk } B} \text{ (tonk B)} \frac{B}{B}$$

offensichtlich keine Ableitung von B erhalten können, die ohne (tonk B) auskommt.

Beispiel. Im Kalkül NK kann das *tertium non datur* (Satz vom ausgeschlossenen Dritten) abgeleitet werden:

$$\frac{\frac{[\neg(A \vee \neg A)]^2}{A \vee \neg A} \quad \frac{[A]^1}{A \vee \neg A} (\vee E)}{[\neg(A \vee \neg A)]^2} \quad \frac{\frac{\perp}{\neg A} (\rightarrow E)^1}{A \vee \neg A} (\vee E)}{\frac{\perp}{A \vee \neg A} (\perp)_c} (\rightarrow B)$$

Es gilt also $\vdash_{\text{NK}} A \vee \neg A$.

Die Beweisbarkeit von $A \vee \neg A$ hängt wesentlich davon ab, dass bei Anwendung der Widerspruchsregel

$$\frac{[\neg A]}{\perp} (\perp)_c$$

Annahmen der Form $\neg A$ gelöscht werden. Dies entspricht der *reductio ad absurdum*, bei der unter Annahme von $\neg A$ auf A geschlossen wird, wobei A nicht mehr von Annahmen der Form $\neg A$ abhängt.

Theorem 2.12 *Der Kalkül NK ist korrekt und vollständig bezüglich der angegebenen aussagenlogischen Semantik, d. h. es gilt:*

Korrektheit: Wenn $\Gamma \vdash_{\text{NK}} A$, dann $\Gamma \models A$.

Vollständigkeit: Wenn $\Gamma \models A$, dann $\Gamma \vdash_{\text{NK}} A$.

Beweis. Siehe z. B. [van Dalen \(2013, § 2.5\)](#).

QED

3 Intuitionistische Logik

In der intuitionistischen Logik werden Prinzipien des logischen Schließens untersucht, die sich aus der auf L. E. J. Brouwer (1881–1966) und A. Heyting (1898–1980) zurückgehenden konstruktiven Behandlung der Mathematik ergeben. Diese Form des Konstruktivismus wird als *Intuitionismus* bezeichnet. Wesentliche Aspekte sind:

Intuitionismus

- (i) Mentale Konstruktionen sind primär in der Mathematik. Es geht nicht um formale Operationen mit Zeichen einer Sprache der Mathematik. Letztere ist lediglich ein Hilfsmittel, um unsere Konstruktionen vermitteln zu können.
- (ii) Die Auffassung, dass mathematische Aussagen wahr oder falsch sind unabhängig von unserem Wissen bezüglich dieser Aussagen wird als sinnlos erachtet. Eine mathematische Aussage ist wahr, falls wir einen Beweis der Aussage haben; sie ist falsch, falls wir zeigen können, dass die Annahme, es gebe einen Beweis der Aussage, zu einem Widerspruch führt. Für eine beliebige Aussage kann daher nicht behauptet werden, dass sie entweder wahr oder falsch sei. Daraus folgt, dass das *tertium non datur* $A \vee \neg A$ nicht allgemein gilt, sondern bestenfalls nur für endliche Gegenstandsbereiche.
- (iii) Der Intuitionismus ist eine Gegenposition zum Platonismus: In der Mathematik werden keine Wahrheiten über unabhängig von uns existierende mathematische Objekte erkannt; diese werden vielmehr von uns geschaffen. Zugelassen ist auch die Untersuchung von nicht abschließbaren Konstruktionen.

Literatur

- M. Dummett (2000), *Elements of Intuitionism* (2nd edition). Oxford: Clarendon Press.
- A. Heyting (1971), *Intuitionism. An Introduction*, 3rd edition. Amsterdam: North-Holland.
- P. Mancosu (Hrsg.) (1998), *From Brouwer to Hilbert*. Oxford University Press.
- J. Moschovakis (2015), *Intuitionistic Logic*. In E. N. Zalta (Hrsg.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, <https://plato.stanford.edu/entries/logic-intuitionistic/>.
- D. Prawitz, *Natural Deduction. A Proof-Theoretical Study*, Almqvist & Wiksell, 1965. Neuauflage 2006, Dover Publications.
- A. Troelstra & D. van Dalen (1988), *Constructivism in Mathematics. An Introduction*, Vol. I. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 121. Amsterdam: North-Holland.
- D. van Dalen (2013), *Logic and Structure* (Fifth edition). Springer.

3.1 Schwache Gegenbeispiele

Wir betrachten zunächst zwei Beispiele, die verdeutlichen sollen, warum bei konstruktivistischer Lesart der logischen Konstanten gewisse Gesetze der klassischen Logik zurückzuweisen sind.

Beispiel. Wir betrachten die Aussage

Es gibt zwei irrationale Zahlen x und y , so dass x^y rational ist.

Sie lässt sich klassisch leicht wie folgt beweisen.

$\sqrt{2}$ ist irrational, und aufgrund des *tertium non datur* gilt: $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ist rational oder nicht rational, d. h. irrational. Wir betrachten die beiden Fälle:

- (i) Angenommen $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ist rational. Wir setzen $x = \sqrt{2}$ und $y = \sqrt{2}$, so dass $x^y = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, was nach Annahme eine rationale Zahl ist.
- (ii) Angenommen $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ist irrational. Wir setzen $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ und $y = \sqrt{2}$. Dann ist $x^y = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$, was rational ist.

Der im Beispiel angegebene Beweis ist jedoch kein *konstruktiver* Beweis, da wir keine zwei Zahlen x und y vorweisen können, so dass x^y rational ist. Bei einer konstruktivistischen Lesart der zu beweisenden Es-gibt-Aussage, bei der “es gibt” als “es kann konstruiert werden” interpretiert wird, liegt somit kein zufriedenstellender Beweis der Aussage vor.

Beispiel. Wir betrachten die Vermutung p

Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge, d. h. Primzahlen n , so dass auch $n + 2$ eine Primzahl ist.

Diese Vermutung ist derzeit noch unentschieden. Es liegt also weder ein Beweis von p noch ein Beweis von $\neg p$ vor. Somit können wir auch nicht behaupten, dass $p \vee \neg p$ gilt.

Dies ist ein sogenanntes *schwaches Gegenbeispiel* für das *tertium non datur*. Aus konstruktivistischer Sicht sagt das *tertium non datur* $A \vee \neg A$ aus, dass wir für jede beliebige Aussage A einen Beweis für A oder einen Beweis für $\neg A$, d. h. eine Konstruktion, die einen hypothetischen Beweis von A in einen Beweis von \perp überführt, haben. Damit wären wir in der Lage, für beliebige Aussagen zu entscheiden, ob diese gelten oder nicht. Doch ein Beispiel wie die Aussage „Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge“, deren Gültigkeit noch nicht entschieden ist, zeigt, dass dies nicht der Fall ist.

Es handelt sich dabei nur um ein schwaches Gegenbeispiel, da das *tertium non datur* nicht widerlegt wurde, d. h. die Annahme des *tertium non datur* nicht zu einem Widerspruch geführt wurde. Es wurde lediglich gezeigt, dass das *tertium non datur* aus konstruktivistischer Sicht kein akzeptables logisches Prinzip ist.

Es ist (aus konstruktivistischer bzw. intuitionistischer Sicht) auch nicht möglich, das *tertium non datur* durch Auffinden einer Aussage A , für die $\neg(A \vee \neg A)$ gilt, zu widerlegen, da $\neg\neg(A \vee \neg A)$ für alle Aussagen A intuitionistisch gilt.

3.2 Die BHK-Interpretation

Die Bedeutung der logischen Zeichen \wedge , \vee , \rightarrow und \perp (sowie \neg) soll durch die folgende *Beweisinterpretation*, bzw. *Brouwer–Heyting–Kolmogorov-Interpretation* (kurz: *BHK-Interpretation*), etwas genauer erklärt werden:

BHK-Interpretation

- (H1) a ist ein Beweis von $A \wedge B$ genau dann, wenn a ein Paar $\langle b, c \rangle$ ist, so dass b ein Beweis von A ist, und c ein Beweis von B ist.
- (H2) a ist ein Beweis von $A \vee B$ genau dann, wenn a ein Paar $\langle b, c \rangle$ ist, so dass $b \in \{0, 1\}$ und c ein Beweis von A ist, falls $b = 0$, und c ein Beweis von B ist, falls $b = 1$.
- (H3) a ist ein Beweis von $A \rightarrow B$ genau dann, wenn a eine Konstruktion ist, die einen beliebigen Beweis b von A in einen Beweis $a(b)$ von B überführt.

(H4) Es gibt keinen Beweis a für \perp . Ein Beweis a von $\neg A$ ist eine Konstruktion, die einen beliebigen hypothetischen Beweis b von A in einen Beweis $a(b)$ von \perp überführt.

Bemerkungen. (i) Die BHK-Interpretation der logischen Konstanten stellt keine wohl-fundierte induktive Definition von “ist ein Beweis von A ” dar, denn es fehlt eine Basisklausel, die diesen Begriff für alle atomaren Formeln festlegt. Es handelt sich vielmehr um eine informelle Explikation der Bedeutung der logischen Konstanten.

(ii) Der Begriff der Konstruktion kann mehr oder weniger weit gefasst werden. Intendiert ist ein Verständnis als Algorithmus oder berechenbare Funktion.

(iii) In Klausel (H4) wird das Falsum \perp als nicht weiter erklärtes Zeichen für einen beliebigen Widerspruch verwendet.

Beispiele. Die folgenden Formeln sind unter der BHK-Interpretation gültig:

(i) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$: Gesucht ist eine Konstruktion c , die einen Beweis a von A in einen Beweis von $B \rightarrow A$ überführt. Für einen gegebenen Beweis a von A ist $c(b) = a$ die gesuchte Konstruktion; sie ordnet jedem Beweis b von B den Beweis a von A zu.

(ii) $(A \wedge B) \rightarrow A$: Sei $\langle a, b \rangle$ ein Beweis von $A \wedge B$. Dann überführt die Konstruktion c , so dass $c(a, b) = a$, den Beweis von $A \wedge B$ in einen Beweis von A . Nach (H3) ist c dann ein Beweis von $(A \wedge B) \rightarrow A$.

(iii) $\perp \rightarrow A$: Da \perp keinen Beweis hat, kann irgendeine Abbildung (z. B. die identische Abbildung $c(a) = a$) als Konstruktion aufgefasst werden, die einen hypothetischen Beweis von \perp in einen Beweis von A überführt. (Man beachte, dass der Definitionsbereich einer solchen Abbildung immer leer ist.)

Nicht gültig ist hingegen $A \vee \neg A$: Gemäß (H2) bedeutet $A \vee \neg A$, dass wir entweder einen Beweis von A oder einen Beweis von $\neg A$ haben, für beliebige Aussagen A . Damit wäre insbesondere die Aussage über Primzahlzwillinge entschieden, was jedoch nicht der Fall ist. Das *tertium non datur* kann also nicht allgemein gelten.

3.3 Kalkül des natürlichen Schließens

Die BHK-Interpretation kann verwendet werden, um die Regeln des Kalküls NI des natürlichen Schließens für die intuitionistische Logik zu begründen. Wir betrachten als Beispiele die Regeln für Konjunktion und Implikation:

(i) Klausel (H1) rechtfertigt von rechts nach links gelesen ($\wedge E$):

$$\frac{\mathcal{D}_b \quad \mathcal{D}_c}{\frac{A \quad B}{A \wedge B}}$$

Von links nach rechts gelesen rechtfertigt (H1) das Regelpaar ($\wedge B$):

$$\frac{\mathcal{D}_a}{\frac{A \wedge B}{A}} \quad \frac{\mathcal{D}_a}{\frac{A \wedge B}{B}}$$

(wobei die linke Regel dem Fall b entspricht, und die rechte dem Fall c).

- (ii) Klausel (H3) rechtfertigt von rechts nach links gelesen (\rightarrow E): Angenommen, wir haben B direkt oder unter (möglicherweise mehrfacher) Verwendung der Annahme A gezeigt. Dann bedeutet dies, dass wir eine Konstruktion gefunden haben, die einen (hypothetischen) Beweis von A in einen Beweis von B überführt. Aufgrund von (H3) ist dies ein Beweis der Implikation $A \rightarrow B$, der nicht mehr von Annahmen A abhängt:

$$\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \mathcal{D}_{a(b)} \\ B \end{array}}{A \rightarrow B}$$

Von links nach rechts gelesen rechtfertigt (H3) die Regel (\rightarrow B): Angenommen, wir haben $A \rightarrow B$ gezeigt. Dann bedeutet dies, dass wir eine Konstruktion gefunden haben, die Beweise von A in einen Beweis von B überführt. Haben wir zusätzlich A gezeigt, so erhalten wir durch Anwendung dieser Konstruktion auf A die Aussage B :

$$\frac{\begin{array}{c} \mathcal{D}_a \quad \mathcal{D}_b \\ A \rightarrow B \quad A \end{array}}{B}$$

- (iii) Wir haben schon gesehen, dass aufgrund von Klausel (H4) das *ex falso* $\perp \rightarrow A$ unter der BHK-Interpretation gültig ist. Dem entspricht die Regel

$$\frac{\perp}{A} (\perp)$$

Man beachte, dass diese Regel (\perp) im Unterschied zur klassischen Widerspruchsregel (\perp)_c keine Löschung von Annahmen $\neg A$ zulässt. Die Regel (\perp) ist also schwächer als die Regel (\perp)_c.

Die klassische Widerspruchsregel (\perp)_c kann durch die BHK-Interpretation jedoch nicht gerechtfertigt werden. Denn mit dieser Regel kann $A \vee \neg A$ abgeleitet werden, was unter der BHK-Interpretation nicht gültig ist.

Definition 3.1 (i) Der *Kalkül NI des natürlichen Schließens* (für intuitionistische Logik) *Kalkül NI* ist durch folgende Regeln gegeben:

<i>Einführungsregel</i>	<i>Beseitigungsregel</i>
$\frac{A_1 \quad A_2}{A_1 \wedge A_2} (\wedge \text{E})$	$\frac{A_1 \wedge A_2}{A_i} (\wedge \text{B}) (i = 1 \text{ oder } 2)$
$\frac{A_i}{A_1 \vee A_2} (\vee \text{E}) (i = 1 \text{ oder } 2)$	$\frac{\begin{array}{c} [A_1] \quad [A_2] \\ A_1 \vee A_2 \quad C \quad C \end{array}}{C} (\vee \text{B})$
$\frac{[A]}{A \rightarrow B} (\rightarrow \text{E})$	$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B} (\rightarrow \text{B})$
<i>Ex-falso-Regel</i>	
$\frac{\perp}{A} (\perp)$	

- (ii) *Ableitungen in NI* sind analog zu Ableitungen in NK definiert.
- (iii) Ist A aus Γ *ableitbar in NI*, so schreiben wir $\Gamma \vdash_{NI} A$.
- (iv) Ist A *beweisbar in NI*, so schreiben wir $\vdash_{NI} A$.

ableitbar in NI
beweisbar in NI

Bemerkungen. (i) Der Kalkül NI unterscheidet sich vom Kalkül NK also lediglich dadurch, dass an die Stelle der Widerspruchsregel $(\perp)_c$ die Ex-falso-Regel (\perp) tritt.

- (ii) Das *ex falso quodlibet sequitur* $\perp \rightarrow A$ könnte als nicht-konstruktives Prinzip zurückgewiesen werden mit der Begründung, dass \perp eine Aussage ist, von der wir nur noch nicht wissen, ob sie beweisbar ist. Es wird also nicht ausgeschlossen, dass es einen Beweis von \perp geben kann, z. B. falls sich die bisher akzeptierte Mathematik als inkonsistent herausstellt. Eine solche Auffassung führt zur sogenannten *minimalen Logik*.

minimale Logik

Einen *Kalkül NM* für minimale Logik erhält man aus NI durch ersatzloses Streichen der Ex-falso-Regel.

Kalkül NM

- (iii) Intuitionistische und minimale Logik sind Beispiele für nicht-klassische (philosophische) Logiken, die schwächer sind als die klassische Logik; in ihnen gelten weniger logische Gesetze als in der klassischen Logik. Es gilt: $\{A \mid \vdash_{NM} A\} \subset \{A \mid \vdash_{NI} A\} \subset \{A \mid \vdash_{NK} A\}$.

Beispiel. Wir zeigen $\vdash_{NI} \neg\neg(A \vee \neg A)$:

$$\frac{\frac{\frac{[\neg(A \vee \neg A)]^2}{\perp} (\rightarrow E)^1}{A \vee \neg A} (\vee E)}{\frac{[\neg(A \vee \neg A)]^2}{\neg A} (\rightarrow E)^1} (\rightarrow B)}{\frac{\perp}{\neg\neg(A \vee \neg A)} (\rightarrow E)^2} (\rightarrow B)$$

Dies macht deutlich, dass aus konstruktivistischer Sicht lediglich *schwache* Gegenbeispiele zum *tertium non datur* angegeben werden können. Ein starkes Gegenbeispiel bestünde in dem Nachweis, dass $p \vee \neg p$ für eine bestimmte Aussage p zu einem Widerspruch führt, d. h. dass $\neg(p \vee \neg p)$ gilt. Dies ist jedoch ausgeschlossen, da $\neg\neg(A \vee \neg A)$ für alle Aussagen A gilt.

Bemerkungen. (i) Die in NI (und folglich auch in NK) beweisbaren Formeln

$$A \rightarrow (B \rightarrow A) \quad (\text{ex quodlibet verum sequitur})$$

und

$$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \quad (\text{ex falso quodlibet sequitur})$$

(bzw. *ex contradictione quodlibet sequitur*) werden als Paradoxien der Implikation aufgefasst. Betrachtet man deren Ableitungen

$$\frac{\frac{[A]^1}{B \rightarrow A} (\rightarrow E)}{A \rightarrow (B \rightarrow A)} (\rightarrow E)^1 \quad \text{und} \quad \frac{\frac{[\neg A]^2}{\perp} (\perp) \quad [A]^1}{A \rightarrow B} (\rightarrow E)^1}{\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)} (\rightarrow E)^2$$

so fällt auf, dass B in beiden Ableitungen beliebig gewählt werden kann. In der ersten Ableitung ist B in $B \rightarrow A$ in diesem Sinne nicht relevant für A , und in der zweiten Ableitung ist A in $A \rightarrow B$ nicht relevant für B .

Eine Logik, in der weder $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ noch $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ gilt, bezeichnet man als *Relevanzlogik*.

Relevanzlogik

- (ii) Neben den logischen Regeln, also Regeln bei denen eine logische Konstante eingeführt oder beseitigt wird, spielen auch strukturelle Operationen eine Rolle.

In der Ableitung von $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ wurde von der Prämisse A zur Konklusion $B \rightarrow A$ übergegangen, ohne dabei eine Annahme B zu löschen. Dies entspricht der strukturellen Operation der *Verdünnung*.

Verdünnung

In der Ableitung von $\neg\neg(A \vee \neg A)$ wurden zwei Vorkommen der Annahme $\neg(A \vee \neg A)$ bei einer Regelanwendung gelöscht. Dies entspricht der strukturellen Operation der *Kontraktion*.

Kontraktion

Durch Einschränkungen bezüglich der strukturellen Operationen gelangt man zu *substrukturellen Logiken*.

substrukturelle Logiken

Theorem 3.2 Die Ableitbarkeitsrelation ist transitiv, d. h. es gilt: Wenn $\Gamma \vdash_{\text{NI}} A$ und $\Delta, A \vdash_{\text{NI}} B$, dann $\Gamma, \Delta \vdash_{\text{NI}} B$.

Beweis. Angenommen, $\Gamma \vdash_{\text{NI}} A$ und $\Delta, A \vdash_{\text{NI}} B$. Dann gibt es Ableitungen

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & & \Delta, A \\ \mathcal{D} & \text{und} & \mathcal{D}' \\ A & & B \end{array}$$

Nun ersetzen wir alle Annahmen A in der zweiten Ableitung durch die erste Ableitung. Man erhält die Ableitung

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \mathcal{D} \\ \Delta, A \\ \mathcal{D}' \\ B \end{array}$$

die $\Gamma, \Delta \vdash_{\text{NI}} B$ zeigt.

QED

3.4 Ableitbarkeit und Zulässigkeit von Regeln

Neben der Ableitbarkeit von Formeln sind die Begriffe der Ableitbarkeit und der Zulässigkeit von Regeln wichtig. Im Unterschied zur klassischen Logik haben diese beiden Begriffe in der intuitionistischen Logik nicht denselben Umfang.

Definition 3.3 Eine Regel

ableitbare Regel

$$\frac{A_1 \quad \dots \quad A_n}{B}$$

heißt *ableitbar* in einem Kalkül K , falls $A_1, \dots, A_n \vdash_K B$.

Beispiel. Die Regel

$$\frac{A \vee \neg A}{\neg\neg A \rightarrow A}$$

ist eine in NI ableitbare Regel. (Übungsaufgabe)

Definition 3.4 Eine Regel R heißt *zulässig* in einem Kalkül K , falls gilt:

zulässige Regel

Wenn $\vdash_{K+R} A$, dann $\vdash_K A$.

(Dabei bedeutet $\vdash_{K+R} A$, dass A in dem um die Regel R erweiterten Kalkül K beweisbar ist, und $\vdash_K A$ bedeutet, dass A im Kalkül K ohne die Regel R beweisbar ist.)

Bemerkungen. Sei R eine beliebige Regel der Form $\frac{A_1 \dots A_n}{B}$.

(i) Zum Nachweis der Ableitbarkeit von R in NI ist

$$A_1, \dots, A_n \vdash_{\text{NI}} B$$

zu zeigen. Es ist also eine entsprechende Ableitung anzugeben.

(ii) Zum Nachweis der Zulässigkeit von R in NI ist zu zeigen:

Wenn $\vdash_{\text{NI}} A_1, \dots, \vdash_{\text{NI}} A_n$, dann $\vdash_{\text{NI}} B$.

(iii) Die Transitivität der Ableitbarkeitsrelation \vdash_{NI} rechtfertigt die Verwendung von in NI ableitbaren Regeln.

(iv) Ableitbarkeit einer Regel impliziert deren Zulässigkeit.

Beispiel. Um den Unterschied zwischen Ableitbarkeit und Zulässigkeit von Regeln zu verdeutlichen, betrachten wir den aus den beiden Regeln

$$\frac{}{0 \in \mathbb{N}} \quad (1) \qquad \frac{k \in \mathbb{N}}{k' \in \mathbb{N}} \quad (2)$$

bestehenden Kalkül zur Erzeugung natürlicher Zahlen \mathbb{N} . Die erste Regel ist ein Axiom und besagt, dass 0 eine natürliche Zahl ist. Die zweite Regel besagt, dass wenn k eine natürliche Zahl ist, dann ist auch deren Nachfolger k' eine natürliche Zahl.

(i) Die Regel

$$\frac{k \in \mathbb{N}}{k'' \in \mathbb{N}} \quad (3)$$

ist ein Beispiel für eine in diesem Kalkül ableitbare Regel, wie die Ableitung

$$\frac{k \in \mathbb{N}}{k' \in \mathbb{N}} \quad (2) \\ \frac{k' \in \mathbb{N}}{k'' \in \mathbb{N}} \quad (2)$$

zeigt.

(ii) Die Regel

$$\frac{k' \in \mathbb{N}}{k \in \mathbb{N}} \quad (4)$$

ist ein Beispiel für eine zulässige Regel. Hier müssen wir unter der Annahme, dass die Prämisse $k' \in \mathbb{N}$ ableitbar ist, zeigen, dass auch die Konklusion $k \in \mathbb{N}$ ableitbar ist.

Die Prämisse kann nicht mit Regel (1) abgeleitet worden sein, da k' nicht 0 sein kann. Also muss die Prämisse mit Regel (2) abgeleitet worden sein. Die Anwendung von (2) setzt voraus, dass wir eine Ableitung von $k \in \mathbb{N}$ haben. Dies ist die gesuchte Ableitung der Konklusion von (4).

Regel (4) ist jedoch offensichtlich nicht ableitbar.

Lemma 3.5 Sei $(\perp)^a$ die auf atomare Konklusionen eingeschränkte Ex-falso-Regel (\perp) , und sei $NI^a = NM + (\perp)^a$ (d. h. NI^a sei jener Kalkül, den wir durch Ersetzung von (\perp) durch $(\perp)^a$ in NI erhalten). Die Regel (\perp) ist zulässig in NI^a .

Das Lemma beweisen wir per Induktion über dem Aufbau von Formeln. Dabei nutzt man aus, dass diese gemäß ihrer Komplexität wie die natürlichen Zahlen geordnet werden können. Das Induktionsmaß ist dann z. B. die Anzahl der in der Formel vorkommenden logischen Konstanten.

Damit haben wir ein *Induktionsprinzip* für Formeln zur Verfügung, denn für die natürlichen Zahlen gilt das *Prinzip der mathematischen Induktion*:

Angenommen, für eine Eigenschaft E gelten die Bedingungen

- (1) $E(0)$, d. h. 0 hat die Eigenschaft E, und
- (2) für jede natürliche Zahl k : wenn $E(k)$, dann $E(k')$.

(Wobei k' der Nachfolger von k sei.)

Dann hat jede natürliche Zahl die Eigenschaft E.

Zur Veranschaulichung: Als (nicht-logische) Regel hat das Prinzip der mathematischen Induktion im natürlichen Schließen die Form

$$\frac{k \in \mathbb{N} \quad E(0) \quad \begin{array}{l} [E(k)] \\ E(k') \end{array}}{\forall k E(k)}$$

wobei k in keiner Annahme außer $E(k)$ vorkommen darf, von der die Prämisse $E(k')$ abhängt.

(Für Weiteres zur mathematischen Induktion siehe z. B. Ch. 15 in R. M. Smullyan, *Logical Labyrinths*, A K Peters, 2009.)

Beweis (von Lemma 3.5). Es ist zu zeigen: Wenn $\vdash_{NI} A$, dann $\vdash_{NI^a} A$. Angenommen, $\vdash_{NI} A$ wird durch die Ableitung

$$\frac{\mathcal{D} \quad \frac{\perp}{C} (\perp)}{\mathcal{D}' \quad A}$$

gezeigt, in der die herausgestellte Anwendung der Ex-falso-Regel (\perp) die Konklusion C mit beliebiger Komplexität hat, und alle anderen möglicherweise vorkommenden Anwendungen von (\perp) Konklusionen geringerer Komplexität haben. Wir führen Induktion über dem Aufbau der Formel C . (Falls die Ableitung von A in NI keine Anwendung von (\perp) enthält, gilt trivialerweise $\vdash_{NI^a} A$.)

Induktionsanfang: Sei C atomar. Dann hat die Ableitung die Form

$$\frac{\mathcal{D} \quad \frac{\perp}{C} (\perp)^a}{\mathcal{D}' \quad A}$$

(wobei auf die gezeigte Anwendung von $(\perp)^a$ verzichtet werden kann, falls C das Falsum ist).

Induktionsannahme: Für Konklusionen D und E sei die Regel (\perp) zulässig in NI^a .

Induktionsschritt: Wir müssen zeigen, dass (\perp) dann auch für Konklusionen C der Form $\neg D, D \wedge E, D \vee E$ und $D \rightarrow E$ zulässig ist.

Wir betrachten den Fall der Konklusion $D \wedge E$, d. h. die Ableitung

$$\frac{\mathcal{D}}{D \wedge E} (\perp)$$

$$\frac{\mathcal{D}'}{A}$$

Unter Verwendung der Induktionsannahme kann diese Ableitung umgeformt werden zu

$$\frac{\frac{\mathcal{D}}{D} (\perp) \quad \frac{\mathcal{D}}{E} (\perp)}{D \wedge E} (\wedge E)$$

$$\frac{\mathcal{D}'}{A}$$

Damit ist die Regel (\perp) auch für Konklusionen der Form $D \wedge E$ zulässig.

Restliche Fälle als Übungsaufgabe.

QED

Bemerkung. Der Induktionsbeweis zeigt, wie sich die Komplexität der Konklusion C von (\perp) schrittweise verringern lässt, bis C schließlich atomar ist. Anstelle von (\perp) kann also $(\perp)^a$ verwendet werden, ohne dass die Stärke von NI dadurch eingeschränkt wird.

Man kann zeigen, dass es in NI zulässige Regeln gibt, die nicht ableitbar sind. Dabei kann man sich zunutze machen, dass jede Ableitung in eine Normalform überführt werden kann, für die bestimmte Eigenschaften gelten.

3.5 Normalisierbarkeit und Eigenschaften von NI

Definition 3.6 (i) Ein Formelvorkommen in einer Ableitung heißt *maximal*, wenn es Konklusion einer Einführungsregel und zugleich Hauptprämisse einer Beseitigungsregel ist. Die entsprechende Formel heißt *Maximalformel*.

maximal

Maximalformel

(ii) Maximale Formelvorkommen können durch *Reduktionen* eliminiert werden, die eine Ableitung mit maximalem Formelvorkommen in eine Ableitung ohne dieses Vorkommen überführen.

Reduktionen

Für implikative Maximalformeln $A \rightarrow B$ ist die \rightarrow -Reduktion ($\triangleright \rightarrow$) wie folgt definiert:

\rightarrow -Reduktion

$$\frac{\frac{[A]}{\mathcal{D}} \quad \frac{B}{A \rightarrow B} (\rightarrow E)}{B} \quad \frac{\mathcal{D}'}{A} (\rightarrow B)}{A} \quad \triangleright \rightarrow \quad \frac{\mathcal{D}'}{B}$$

Falls in \mathcal{D} keine Annahmen A vorkommen, ist das Resultat der \rightarrow -Reduktion die Ableitung $\frac{\mathcal{D}}{B}$.

Entsprechend definiert man \wedge - und \vee -Reduktionen für Maximalformeln der Form $A \wedge B$ und $A \vee B$. (Übungsaufgabe; vgl. auch die Bemerkungen zum *Inversionsprinzip*.)

- (iii) Eine Ableitung heißt *normal*, falls sie kein maximales Formelvorkommen enthält. Die Ableitung ist dann in *Normalform*. *normal*
Normalform

Bemerkung. Neben Reduktionen müssen wegen der Form der Disjunktionsbeseitigungsregel auch noch gewisse Permutationen betrachtet werden, auf die wir hier jedoch nicht eingehen.

Theorem 3.7 (Normalisierbarkeit) Wenn $\Gamma \vdash_{NI} A$ gilt, dann gibt es in NI eine normale Ableitung von A aus Γ .

Beweis. Siehe Prawitz (1965, Ch. IV § 1). QED

Korollar 3.8 Es gilt Folgendes:

- (i) *Teilformeleigenschaft:* Jede in einer normalen Ableitung von A aus Annahmen Γ vorkommende Formel ist Teilformel von A oder Teilformel von Formeln in Γ . *Teilformel-*
eigenschaft
- (ii) *Separationseigenschaft:* In einer normalen Ableitung von A aus Annahmen Γ kommen nur Regeln für in A und Γ vorkommende logische Konstanten vor. *Separations-*
eigenschaft
- (iii) Ableitungen, die in Normalform sind und keine offenen Annahmen enthalten, enden immer mit einer Einführungsregel.
- (iv) Da \perp nicht mit einer Einführungsregel abgeleitet werden kann, gilt $\not\vdash_{NI} \perp$, d. h. NI ist konsistent. (Entsprechend kann man für jedes Aussagesymbol argumentieren.)
- (v) *Disjunktionseigenschaft:* Wenn $\vdash_{NI} A \vee B$, dann $\vdash_{NI} A$ oder $\vdash_{NI} B$. *Disjunktions-*
eigenschaft
- (vi) *Verallgemeinerte Disjunktionseigenschaft:* Sei Γ eine \vee -freie Formelmenge. Dann gilt: Wenn $\Gamma \vdash_{NI} A \vee B$, dann $\Gamma \vdash_{NI} A$ oder $\Gamma \vdash_{NI} B$.

Bemerkungen. (i) Normalisierbarkeit gilt auch für NM und NK.

(ii) Alle im Korollar genannten Eigenschaften gelten auch für NM, wobei \perp in der minimalen Logik keine logische Konstante darstellt, sondern wie ein Aussagesymbol behandelt wird.

(iii) Mit Ausnahme von Konsistenz (iv) gilt für NK hingegen keine der im Korollar genannten Eigenschaften.

Die Teilformeleigenschaft gilt immerhin eingeschränkt; ausgenommen sind Annahmen, die bei Anwendungen der Widerspruchsregel $(\perp)_c$ gelöscht werden, und Vorkommen von \perp , die unmittelbar unter solchen Annahmen stehen.

Ein Beispiel für die Verletzung der Separationseigenschaft ist durch das Peircesche Gesetz

$$((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$$

gegeben. Die Ableitung dieser rein implikativen Formel erfordert neben $(\rightarrow E)$ und $(\rightarrow B)$ auch die Verwendung von $(\perp)_c$.

(iv) Bei der verallgemeinerten Disjunktionseigenschaft (vi) genügt schon die schwächere Voraussetzung, dass keine Formel in Γ eine strikt positive Teilformel mit Hauptkonjunktiv \vee enthält. (Siehe Prawitz, 1965, S. 43, 55.)

Definition 3.9 Die Biimplikation \leftrightarrow kann unter Verwendung von \rightarrow und \wedge wie folgt definiert werden: $A \leftrightarrow B := (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$. (Die Bindungsstärke von \leftrightarrow entspreche der von \rightarrow .)

Theorem 3.10 *Es gibt in NI zulässige Regeln, die in NI nicht ableitbar sind.*

Beweis. Die *Harropsche Regel* $\frac{\neg A \rightarrow (B \vee C)}{(\neg A \rightarrow B) \vee (\neg A \rightarrow C)}$ ist in NI zulässig, aber nicht ableitbar. *Harropsche Regel*

Die Zulässigkeit der Regel folgt aus der verallgemeinerten Disjunktionseigenschaft und der Tatsache, dass eine negierte Formel $\neg A$ immer in eine \vee -freie Formel A' umgeformt werden kann und umgekehrt, so dass $\vdash_{\text{NI}} \neg A \leftrightarrow A'$ gilt.

Angenommen $\vdash_{\text{NI}} \neg A \rightarrow (B \vee C)$ aufgrund einer Ableitung \mathcal{D} in Normalform. Nach Korollar 3.8 (iii) endet \mathcal{D} mit $(\rightarrow E)$, d. h. es gilt auch $\neg A \vdash_{\text{NI}} B \vee C$. Nun überführen wir $\neg A$ mittels

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \vdash_{\text{NI}} \neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \\ \vdash_{\text{NI}} \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg(\neg \neg A \wedge \neg \neg B) \\ \vdash_{\text{NI}} \neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg \neg A \wedge \neg B) \end{array} \right.$$

in eine \vee -freie Formel A' , so dass $\vdash_{\text{NI}} \neg A \leftrightarrow A'$. Wir erhalten also $A' \vdash_{\text{NI}} B \vee C$. Darauf ist die verallgemeinerte Disjunktionseigenschaft anwendbar, und man erhält $A' \vdash_{\text{NI}} B$ oder $A' \vdash_{\text{NI}} C$. Erneute Umformung mit $(*)$ liefert $\neg A \vdash_{\text{NI}} B$ bzw. $\neg A \vdash_{\text{NI}} C$. In beiden Fällen muss es eine entsprechende Ableitung \mathcal{D}_1 bzw. \mathcal{D}_2 geben, die wir zu einem Beweis der Konklusion der Regel erweitern können:

$$\frac{\frac{\frac{[\neg A]^1}{\mathcal{D}_1} B}{\neg A \rightarrow B} (\rightarrow E)^1}{(\neg A \rightarrow B) \vee (\neg A \rightarrow C)} (\vee E) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\frac{\frac{[\neg A]^1}{\mathcal{D}_2} C}{\neg A \rightarrow C} (\rightarrow E)^1}{(\neg A \rightarrow B) \vee (\neg A \rightarrow C)} (\vee E)}$$

Somit wurde gezeigt: Wenn $\vdash_{\text{NI}} \neg A \rightarrow (B \vee C)$, dann $\vdash_{\text{NI}} (\neg A \rightarrow B) \vee (\neg A \rightarrow C)$. Die Harropsche Regel ist also in NI zulässig.

Auf den Beweis der Nichtableitbarkeit müssen wir hier verzichten. Er kann durch Angabe eines Gegenmodells in der Kripke-Semantik (siehe Abschnitt 3.7) erfolgen, für die NI korrekt (und vollständig) ist. QED

Bemerkungen. (i) Eine zulässige Regel, die nicht ableitbar ist, darf nur dann in einer Ableitung verwendet werden, wenn keine ihrer Prämissen von offenen Annahmen abhängt. Andernfalls könnte man in NI Formeln ableiten, die nicht beweisbar sind:

$$\frac{\frac{[\neg A \rightarrow (B \vee C)]^1}{(\neg A \rightarrow B) \vee (\neg A \rightarrow C)} (\text{Harropsche Regel}) \not\vdash}{(\neg A \rightarrow (B \vee C)) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \vee (\neg A \rightarrow C))} (\rightarrow E)^1$$

Bei dieser (inkorrekten) Anwendung der Harropschen Regel hängt die Prämisse noch von sich selbst als offener Annahme ab; man erhielte die *Kreisel–Putnam-Formel* $(\neg A \rightarrow (B \vee C)) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \vee (\neg A \rightarrow C))$, die jedoch in NI nicht beweisbar ist. *Kreisel–Putnam-Formel*

(ii) Erweitert man NI durch Hinzunahme zulässiger, aber nicht ableitbarer Regeln, so erhält man sogenannte *superintuitionistische* oder *intermediäre Logiken*, die zwischen intuitionistischer und klassischer Logik liegen. *intermediäre Logiken*

Erweitert man NI z. B. um die Harropsche Regel, so erhält man die sog. *Kreisel–Putnam-Logik*. Ein weiteres Beispiel ist die sog. *Gödel–Dummett-Logik*, die man durch Hinzunahme von $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ als Axiom erhält.

Es gibt unendlich viele intermediäre Logiken. (Siehe Gödel, 1932.)

Beispiele. Weitere Beispiele für in NI zulässige, aber nicht ableitbare Regeln sind:

(i) Die Regel $\frac{\neg\neg A \rightarrow A}{A \vee \neg A}$

(ii) Die *Mintssche Regel*: $\frac{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \vee C)}{((A \rightarrow B) \rightarrow A) \vee ((A \rightarrow B) \rightarrow C)}$

Mintssche Regel

Bemerkungen. (i) Logiken, in denen nicht jede zulässige Regel ableitbar ist, bezeichnet man auch als *strukturell unvollständig*.

strukturell unvollständig

(ii) Im Unterschied zu NI ist in NK jede zulässige Regel auch ableitbar, d. h. die klassische Logik ist *strukturell vollständig*.

strukturell vollständig

Dies lässt sich (klassisch) leicht per Kontraposition zeigen: Angenommen, eine Regel

$$\frac{A_1 \quad \dots \quad A_n}{B}$$

ist in NK nicht ableitbar, d. h. $A_1, \dots, A_n \not\vdash_{\text{NK}} B$. Dann gilt aufgrund Vollständigkeit $A_1, \dots, A_n \not\models B$. Es muss also eine Bewertung h geben, so dass $\llbracket A_1 \rrbracket^h = \dots = \llbracket A_n \rrbracket^h = w$, aber $\llbracket B \rrbracket^h = f$. Nun ersetzen wir alle in A_1, \dots, A_n, B vorkommenden Aussagesymbole $A \in \text{AS}$ entweder durch $\top := p \rightarrow p$, falls $h(A) = w$, oder durch \perp , falls $h(A) = f$. Dann gilt $\models A_1, \dots, \models A_n$ und $\models \neg B$, also insbesondere $\not\models B$. Aufgrund Vollständigkeit und Korrektheit gilt damit $\vdash_{\text{NK}} A_1, \dots, \vdash_{\text{NK}} A_n$, aber $\not\vdash_{\text{NK}} B$, d. h. die Regel kann nicht zulässig sein.

Definition 3.11 Wir sagen, dass eine logische Konstante $* \in \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ in einem Kalkül K durch eine Formel C *ausgedrückt* werden kann, falls $\vdash_K *A \leftrightarrow C$ oder $\vdash_K (A * B) \leftrightarrow C$ für eine Formel C , in der $*$ selbst nicht vorkommt. Falls es keine solche Formel C gibt, heißt $*$ *unabhängig*.

unabhängig

Theorem 3.12 In NI ist jede der logischen Konstanten \neg, \wedge, \vee und \rightarrow *unabhängig*.

Beweis. Siehe Wajsberg (1938) oder McKinsey (1939).

QED

Bemerkungen. (i) Keine echte Teilmenge von $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ kann funktional vollständig für die intuitionistische Logik sein. Dies ist ein weiterer wesentlicher Unterschied zur klassischen Logik, in der z. B. $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ und $\{\neg, \rightarrow\}$ funktional vollständige Mengen sind.

In diesem Sinne hat in der intuitionistischen Logik jede der logischen Konstanten \neg, \wedge, \vee und \rightarrow eine eigenständige Bedeutung, da keine durch die jeweils anderen ausgedrückt werden kann.

(ii) In der Gödel–Dummett-Logik GD (in der Literatur auch mit G oder LC bezeichnet) kann zumindest \vee durch $\{\wedge, \rightarrow\}$ ausgedrückt werden. Es gilt (Übungsaufgabe):

$$\vdash_{\text{GD}} (A \vee B) \leftrightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \wedge ((B \rightarrow A) \rightarrow A))$$

Diese intermediäre Logik liegt also auch bezüglich Unabhängigkeit der logischen Konstanten zwischen intuitionistischer und klassischer Logik.

Theorem 3.13 (Deduktionstheorem)

$A_1, \dots, A_n \vdash_{\text{NI}} B$ genau dann, wenn $\vdash_{\text{NI}} A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B$. (Ebenso für NM und NK.)

Beweis. Übungsaufgabe.

QED

3.6 Verhältnis von klassischer zu minimaler und intuitionistischer Logik

Im Folgenden untersuchen wir das Verhältnis von klassischer Logik (NK) zu minimaler Logik (NM) und zu intuitionistischer Logik (NI) etwas genauer. Dabei bedient man sich gewisser Übersetzungen von Formeln. Als weiteres Hilfsmittel verwenden wir ein Resultat zu sogenannten negativen Formeln, die ein Fragment unserer Sprache der Aussagenlogik bilden.

Definition 3.14 Eine Formel A heißt *negativ*, falls sie \forall -frei ist, und alle in ihr vorkommenden Aussagesymbole negiert sind. *negative Formel*

Lemma 3.15 Für negative Formeln A gilt: $\vdash_{\text{NM}} \neg\neg A \leftrightarrow A$.

Beweis. Wir zeigen dies per Induktion über dem Aufbau von A . Dabei verwenden wir, dass für beliebige Formeln A, B gilt:

$$\vdash_{\text{NM}} A \rightarrow \neg\neg A \quad (1)$$

$$\vdash_{\text{NM}} \neg\neg\neg A \leftrightarrow \neg A \quad (2)$$

$$\vdash_{\text{NM}} \neg\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg\neg A \wedge \neg\neg B) \quad (3)$$

$$\vdash_{\text{NM}} \neg\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg\neg B) \quad (4)$$

(In NI gilt zusätzlich $(\neg\neg A \wedge \neg\neg B) \rightarrow \neg\neg(A \wedge B)$ und $(A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow \neg\neg(A \rightarrow B)$, was wir hier jedoch nicht benötigen.)

Induktionsanfang: Im Fall $A \in \text{AS}$ ist A keine negative Formel, so dass die Behauptung trivial folgt.

Im Fall $A \equiv \perp$ folgt die Behauptung mit

$$\frac{(\perp \rightarrow \perp) \rightarrow \perp \quad \frac{[\perp]^1}{\perp \rightarrow \perp} (\rightarrow \text{E})^1}{\perp} (\rightarrow \text{B})$$

und (1).

Induktionsannahme: Die Behauptung gelte für Formeln B und C .

Induktionsschritt: Es ist zu zeigen, dass die Behauptung dann auch für $\neg B$, $B \wedge C$, $B \vee C$ und $B \rightarrow C$ gilt.

Im Fall $A \equiv B \vee C$ folgt die Behauptung trivial, da A keine negative Formel ist.

Nun betrachten wir den Fall $A \equiv (B \rightarrow C)$: Es ist $\neg\neg A \equiv \neg\neg(B \rightarrow C)$. Aufgrund von (4) gilt

$$\vdash_{\text{NM}} \neg\neg(B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow \neg\neg C)$$

und mit dem Deduktionstheorem erhält man

$$\neg\neg(B \rightarrow C) \vdash_{\text{NM}} B \rightarrow \neg\neg C \quad (\text{A})$$

Nach Induktionsannahme gilt insbesondere $\vdash_{\text{NM}} \neg\neg C \rightarrow C$, d. h. die Regel

$$\frac{\neg\neg C}{C} (*)$$

ist in NM ableitbar, sofern C eine negative Formel ist. Mit

$$\frac{\frac{B \rightarrow \neg\neg C \quad [B]^1}{\neg\neg C} (\rightarrow B)}{\frac{C}{B \rightarrow C} (*)} (\rightarrow E)^1$$

erhält man

$$B \rightarrow \neg\neg C \vdash_{\text{NM}} B \rightarrow C \quad (\text{B})$$

Transitivität von \vdash_{NM} angewendet auf (A) und (B) liefert $\neg\neg(B \rightarrow C) \vdash_{\text{NM}} B \rightarrow C$, woraus wir mit dem Deduktionstheorem $\vdash_{\text{NM}} \neg\neg(B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C)$ erhalten. Mit (1) folgt die Behauptung.

Restliche Fälle als Übungsaufgabe.

QED

Nun betrachten wir eine Übersetzung für Formeln, bei der Aussagesymbole doppelt negiert werden, und disjunktive Formeln eine schwächere Bedeutung dadurch erhalten, dass sie mittels Negation und Konjunktion ausgedrückt werden.

Bemerkung. Es gilt $A \vee B \vdash_{\text{NM}} \neg(\neg A \wedge \neg B)$, aber $\neg(\neg A \wedge \neg B) \not\vdash_{\text{NI}} A \vee B$.

Definition 3.16 Die Übersetzung g ist wie folgt definiert:

Übersetzung g

- (i) $\perp^g := \perp$,
- (ii) $A^g := \neg\neg A$ für Aussagesymbole $A \in \text{AS}$,
- (iii) $(A \wedge B)^g := A^g \wedge B^g$,
- (iv) $(A \vee B)^g := \neg(\neg A^g \wedge \neg B^g)$,
- (v) $(A \rightarrow B)^g := A^g \rightarrow B^g$.

Für Formelmengen Γ sei $\Gamma^g := \{B^g \mid B \in \Gamma\}$.

Bemerkung. Die Übersetzung g stammt in dieser Form von Gentzen. Alternative Übersetzungen wurden von Kolmogorov, Gödel, Kuroda und Krivine benutzt. Man spricht zusammenfassend von *negative translations*.

negative translations

- Beispiele.** (i) $(p \vee \neg p)^g \equiv \neg(\neg p^g \wedge \neg\neg p^g) \equiv \neg(\neg\neg p \wedge \neg\neg\neg p)$.
(ii) $(\neg\neg p \rightarrow p)^g \equiv \neg\neg p^g \rightarrow p^g \equiv \neg\neg\neg\neg p \rightarrow \neg\neg p$.

Unter Verwendung von $\vdash_{\text{NM}} \neg\neg\neg A \leftrightarrow \neg A$ können (Teil-)Formeln $\neg\neg\neg A$ noch zu $\neg A$ vereinfacht werden.

Theorem 3.17 $\Gamma \vdash_{\text{NK}} A$ genau dann, wenn $\Gamma^g \vdash_{\text{NM}} A^g$.

Beweis. Um die Richtung von rechts nach links zu beweisen, zeigt man zunächst $\vdash_{\text{NK}} A \leftrightarrow A^g$, und verwendet dann: $\Gamma \vdash_{\text{NM}} A \implies \Gamma \vdash_{\text{NK}} A$. (Übungsaufgabe)

Die Richtung von links nach rechts beweisen wir per Induktion über dem Aufbau von Ableitungen \mathcal{D} der Formel A aus der Annahmenmenge Γ .

Induktionsanfang: Sei $A \in \Gamma$, dann ist auch $A^g \in \Gamma^g$. Somit gilt $\Gamma^g \vdash_{\text{NM}} A^g$. (Dies schließt den Fall $\{A\} = \Gamma$ ein, in dem die Ableitung \mathcal{D} nur aus dem Knoten A besteht.)

Induktionsannahme: Die Behauptung gelte für die Ableitung(en) der Prämisse(n) der im letzten Schritt von \mathcal{D} angewandten Regel.

Induktionsschritt: Es sind alle im letzten Schritt anwendbaren Regeln zu betrachten. Als Beispiele behandeln wir die Fälle $(\rightarrow E)$, $(\vee B)$ und $(\perp)_c$.

(i) \mathcal{D} endet mit $(\rightarrow E)$:

$$\frac{\Gamma, [A]^n \quad \mathcal{D} \quad \frac{B}{A \rightarrow B} (\rightarrow E)^n}{A \rightarrow B} (\rightarrow E)^n$$

Nach Induktionsannahme gilt: $\Gamma^g, A^g \vdash_{\text{NM}} B^g$. Mit

$$\frac{\Gamma^g, [A^g]^n \quad \mathcal{D}^g \quad \frac{B^g}{A^g \rightarrow B^g} (\rightarrow E)^n}{A^g \rightarrow B^g} (\rightarrow E)^n$$

gilt $\Gamma^g \vdash_{\text{NM}} A^g \rightarrow B^g$, und aufgrund Definition von g auch $\Gamma^g \vdash_{\text{NM}} (A \rightarrow B)^g$.

(ii) \mathcal{D} endet mit $(\vee B)$:

$$\frac{\frac{\Gamma \quad \mathcal{D} \quad A \vee B}{A \vee B} \quad \frac{\Gamma, [A]^n \quad \mathcal{D}_1 \quad C}{C} (\vee B)^n \quad \frac{\Gamma, [B]^n \quad \mathcal{D}_2 \quad C}{C} (\vee B)^n}{C} (\vee B)^n$$

Nach Induktionsannahme gilt:

$$(1) \Gamma^g \vdash_{\text{NM}} (A \vee B)^g, \quad (2) \Gamma^g, A^g \vdash_{\text{NM}} C^g, \quad (3) \Gamma^g, B^g \vdash_{\text{NM}} C^g.$$

Nach Definition von g gilt dann mit (1): $\Gamma^g \vdash_{\text{NM}} \neg(\neg A^g \wedge \neg B^g)$, mit einer entsprechenden Ableitung \mathcal{D}' . Des Weiteren gibt es aufgrund von (2) und (3) Ableitungen

$$\mathcal{D}'_1 \left\{ \begin{array}{l} \Gamma^g, [A^g]^n \\ \mathcal{D}'_1 \\ \frac{C^g}{A^g \rightarrow C^g} (\rightarrow E)^n \end{array} \right. \quad \text{und} \quad \mathcal{D}'_2 \left\{ \begin{array}{l} \Gamma^g, [B^g]^n \\ \mathcal{D}'_2 \\ \frac{C^g}{B^g \rightarrow C^g} (\rightarrow E)^n \end{array} \right.$$

Dann gilt $\Gamma^g \vdash_{\text{NM}} C^g$ aufgrund folgender Ableitung:

$$\frac{\frac{\Gamma^g \quad \mathcal{D}' \quad \neg(\neg A^g \wedge \neg B^g)}{\neg(\neg A^g \wedge \neg B^g)} \quad \frac{\frac{\frac{\frac{\mathcal{D}'_1 \quad A^g \rightarrow C^g \quad [A^g]^1 (\rightarrow B)}{[\neg C^g]^3 \quad \frac{A^g \rightarrow C^g}{C^g} (\rightarrow B)}{[\neg C^g]^3} (\rightarrow B)}{\frac{\perp}{\neg A^g} (\rightarrow E)^1} (\rightarrow B)}{\frac{\perp}{\neg A^g} (\rightarrow E)^1} (\rightarrow B)}{\frac{\perp}{\neg A^g} (\rightarrow E)^1} (\rightarrow B)}{\frac{\frac{\frac{\mathcal{D}'_2 \quad B^g \rightarrow C^g \quad [B^g]^2 (\rightarrow B)}{[\neg C^g]^3 \quad \frac{B^g \rightarrow C^g}{C^g} (\rightarrow B)}{[\neg C^g]^3} (\rightarrow B)}{\frac{\perp}{\neg B^g} (\rightarrow E)^2} (\rightarrow B)}{\frac{\perp}{\neg B^g} (\rightarrow E)^2} (\rightarrow B)}{\frac{\perp}{\neg B^g} (\rightarrow E)^2} (\rightarrow B)}{\frac{\perp}{\neg A^g \wedge \neg B^g} (\rightarrow B)} (\wedge E)}{\frac{\perp}{\neg A^g \wedge \neg B^g} (\rightarrow B)} (\rightarrow B)}{\frac{\perp}{\neg \neg C^g} (\rightarrow E)^3} (\rightarrow E)^3} \frac{\perp}{C^g} (\text{Lemma 3.15})$$

Im letzten Schritt konnte Lemma 3.15 angewendet werden, da C^g eine negative Formel ist: sie ist \vee -frei (Def. 3.16 (iv)), und es kommen nur (doppelt) negierte Aussagesymbole vor (Def. 3.16 (ii)).

(iii) \mathcal{D} endet mit $(\perp)_c$:

$$\frac{\Gamma, [\neg A]^n}{\mathcal{D}} \frac{\perp}{A} (\perp)_c^n$$

Nach Induktionsannahme gilt: $\Gamma^g, (\neg A)^g \vdash_{\text{NM}} \perp^g$; und mit

$$\perp^g \equiv \perp \quad \text{und} \quad (\neg A)^g \equiv (A \rightarrow \perp)^g \equiv A^g \rightarrow \perp^g \equiv A^g \rightarrow \perp \equiv \neg A^g$$

gilt auch $\Gamma^g, \neg A^g \vdash_{\text{NM}} \perp$, mit einer Ableitung \mathcal{D}^g . Aufgrund von Lemma 3.15 gilt zudem $\vdash_{\text{NM}} \neg\neg A^g \rightarrow A^g$, da A^g eine negative Formel ist. Dann gilt $\Gamma^g \vdash_{\text{NM}} A^g$ aufgrund der Ableitung

$$\frac{\frac{\Gamma, [\neg A^g]^n}{\mathcal{D}^g} \frac{\perp}{\neg\neg A^g \rightarrow A^g} (\text{Lemma 3.15})}{A^g} \frac{\frac{\perp}{\neg\neg A^g} (\rightarrow E)^n}{(\rightarrow B)}$$

Restliche Fälle als Übungsaufgabe.

QED

Korollar 3.18 Für negative Formeln A gilt: $\vdash_{\text{NK}} A$ genau dann, wenn $\vdash_{\text{NM}} A$.

Beweis. Für negative Formeln A ist auch A^g eine negative Formel, in der vor jedem Aussagesymbol zwei zusätzliche Negationen stehen. Somit gilt mit Lemma 3.15 (und (1)-(4) im zugehörigen Beweis): $\vdash_{\text{NM}} A \leftrightarrow A^g$. QED

Bemerkungen. (i) Die klassische Logik ist also eine konservative Erweiterung der minimalen Logik in Bezug auf negative Formeln.

(ii) In der klassischen Logik ist jede Formel zu einer negativen Formel äquivalent: ersetze jedes Aussagesymbol $A \in \text{AS}$ durch $\neg\neg A$, und beseitige Disjunktionen mit De Morgan. Damit ist die klassische Logik in gewisser Weise in der minimalen Logik enthalten, obgleich $\vdash_{\text{NK}} A \implies \vdash_{\text{NM}} A$ nicht für beliebige Formeln A gilt.

(iii) Da \perp eine negative Formel ist, gilt mit Korollar 3.18: $\not\vdash_{\text{NK}} \perp$ genau dann, wenn $\not\vdash_{\text{NM}} \perp$. NK ist also konsistent genau dann, wenn NM konsistent ist.

Die Konsistenz von NK folgt direkt aus $\not\vdash \perp$ und Korrektheit. Damit ist auch NM konsistent. Letzteres folgt auch schon aus der Konsistenz von NI (Korollar 3.8 (iv)), da NM in NI enthalten ist.

Theorem 3.19 (Glivenko) Es gilt:

(i) $\vdash_{\text{NK}} A$ genau dann, wenn $\vdash_{\text{NI}} \neg\neg A$.

(ii) $\vdash_{\text{NK}} \neg A$ genau dann, wenn $\vdash_{\text{NI}} \neg A$.

Beweis. (i) Man zeigt per Induktion über dem Aufbau von A , dass $\vdash_{\text{NI}} A^g \leftrightarrow \neg\neg A$ (Übungsaufgabe). Die Behauptung folgt mit Theorem 3.17.

(ii) Angenommen, $\vdash_{\text{NK}} \neg A$. Dann folgt mit (i), dass $\vdash_{\text{NI}} \neg\neg\neg A$. Mit $\vdash_{\text{NI}} \neg\neg\neg A \leftrightarrow \neg A$ folgt $\vdash_{\text{NI}} \neg A$.

(Die Richtung von rechts nach links folgt bei beiden Aussagen schon daraus, dass NK eine Erweiterung von NI ist, und $\vdash_{\text{NK}} \neg\neg A \rightarrow A$.) QED

- Bemerkungen.** (i) Es gilt auch die Verallgemeinerung: $A_1, \dots, A_n \vdash_{\text{NK}} A$ genau dann, wenn $\neg\neg A_1, \dots, \neg\neg A_n \vdash_{\text{NI}} \neg\neg A$.
- (ii) Das Theorem von Glivenko gilt *nicht* für die Quantorenlogik. Für quantorenlogisch erweiterte Kalküle NK und NI gilt z. B. $\vdash_{\text{NK}} \forall x(A(x) \vee \neg A(x))$, aber $\not\vdash_{\text{NI}} \neg\neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$.

3.7 Kripke-Semantik für die intuitionistische Logik

Von Gödel (1932) wurde gezeigt, dass es für die intuitionistische Logik keine wahrheitsfunktionale Semantik mit nur endlich vielen Wahrheitswerten geben kann.

Im Folgenden betrachten wir mit der Kripke-Semantik für die intuitionistische Logik eine nicht-wahrheitsfunktionale Semantik, bei der es sich um eine sogenannte *Mögliche-Welten-Semantik* handelt. Der Kalkül NI ist korrekt und vollständig für diese Semantik.

Mögliche-Welten-Semantik

Zur Motivation dieser Semantik betrachten wir zunächst das Vorgehen eines *idealisierten Mathematikers*, der im Intuitionismus auch als *kreatives Subjekt* bezeichnet wird, und betrachten dann, welche Situation bei einem schwachen Gegenbeispiel für $A \vee \neg A$ vorliegt.

Der idealisierte Mathematiker hat zu einem gegebenen Zeitpunkt ein bestimmtes Wissen, d. h. es gibt eine Menge von Aussagen, die er zu diesem Zeitpunkt als gültig erkannt hat. Dieses Wissen kann er mit der Zeit in verschiedene Richtungen erweitern. Die für verschiedene Wissenserweiterungen möglichen Zustände des idealisierten Mathematikers sind also nicht als linear geordnet aufzufassen, sondern stellen eine *partielle Ordnung* dar. Eine partielle Ordnung ist reflexiv (jeder Zustand steht zu sich selbst in Relation), antisymmetrisch (zwei verschiedene Zustände können nicht zugleich vor dem jeweils anderen liegen) und transitiv; die Ordnung ist partiell, da zwei verschiedene Zustände nicht unbedingt in Relation zueinander stehen müssen (es gibt alternative Wissenserweiterungen). Das Wissen des idealisierten Mathematikers wird als *monoton* bezüglich späteren Zeitpunkten aufgefasst. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von *Persistenz*, d. h. Wissen kann nicht verlorengehen.

partielle Ordnung

Monotonie

Die Vorstellung einer zeitlichen Ordnung der Zustände soll hier nur zur Erläuterung dienen; wesentlich ist die Vorstellung, dass die Wissen repräsentierenden Zustände eine partielle Ordnung mit Monotonie nahelegen.

Die logischen Konstanten werden nun so verstanden, dass die Interpretation komplexer Aussagen auf den Interpretationen ihrer Teilaussagen beruht:

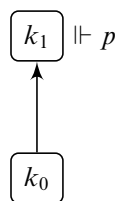
- Hat der idealisierte Mathematiker im Zustand k etwa p als gültig erkannt und q als gültig erkannt, so gilt in k auch $p \wedge q$.
- Entsprechend gilt in k die Aussage $p \vee q$ genau dann, wenn in k die Aussage p gilt oder die Aussage q gilt.

Eine Implikation $p \rightarrow q$ kann auch dann in einem Zustand k als gültig erkannt werden, wenn in k weder etwas über die Gültigkeit von p noch über die Gültigkeit von q gewusst wird. Sei etwa p die Aussage “in der Dezimalexpansion von π kommt eine Folge von 1000 Einsen vor”, und sei q die Aussage “in der Dezimalexpansion von π kommt eine Folge von 999 Einsen vor”. Auch wenn wir im Zustand k weder p noch q wissen, so wissen wir doch, dass $p \rightarrow q$ in k gelten muss. Betrachten wir nun einen Zustand k' , der unser Wissen um p erweitert. Aufgrund Monotonie gilt in k' auch $p \rightarrow q$; folglich muss in k' auch q gelten. Umgekehrt gilt, dass eine Implikation $p \rightarrow q$ in einem Zustand k

gültig ist, falls in jeder Erweiterung von k , in der p gilt, auch q gilt. Aufgrund Reflexivität schließt dies k als triviale Erweiterung mit ein.

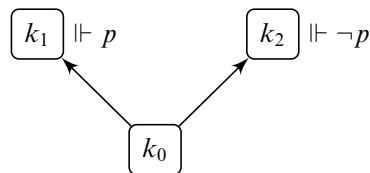
- In einem Zustand k gilt also $p \rightarrow q$ genau dann, wenn in jeder Erweiterung k' von k (einschließlich k) gilt: Wenn p gilt, dann gilt auch q .
- In keinem Zustand k gilt \perp . Dies folgt aus dem hier gemachten Ansatz, in dem der idealisierte Mathematiker zu jedem Zeitpunkt Wissen hat.

Zur Veranschaulichung betrachten wir nun die Situation bei einem schwachen Gegenbeispiel für $A \vee \neg A$. Dazu gehen wir von einer im jetzigen Zustand k_0 noch unentschiedenen Aussage p aus. Es ist aber nicht ausgeschlossen, dass zu einem späteren Zeitpunkt ein Beweis für p gefunden wird (Zustand k_1). Diese Situation lässt sich wie folgt darstellen (wobei wir $\Vdash p$ für “ p gilt” schreiben, und auf Pfeile zur Anzeige von Reflexivität verzichten):



Im Zustand k_0 wissen wir weder, ob p gilt, noch ob p nicht gilt. In k_0 können wir auch $\neg p$ nicht behaupten, da es einen Zustand geben kann, in dem p gilt (hier k_1). Somit kann in k_0 auch $p \vee \neg p$ nicht gelten. In k_0 gilt jedoch $\neg\neg p$, da es keinen auf k_0 folgenden Zustand gibt, in dem $\neg p$ gilt.

Da p in k_0 noch unentschieden ist, kann jedoch auch der Fall eintreten, dass wir zu einem späteren Zeitpunkt k_2 einen Beweis von $\neg p$ finden. Wir haben also folgende Situation:



Nach wie vor wissen wir in k_0 nicht, ob $\neg p$ gilt. Zudem kann in k_0 nicht $\neg\neg p$ gelten. Denn dazu müsste in jedem auf k_2 folgenden Zustand (einschließlich k_2) auch \perp gelten, was nicht sein kann. In k_0 gilt also auch nicht $\neg\neg p \vee \neg p$.

Nun definieren wir die Kripke-Semantik formal. Dabei verwenden wir den Begriff *Modell* im Sinne von *Struktur*; d. h. ein Modell beschreibt eine bestimmte Situation, in der eine Formel A gelten kann, oder auch nicht gelten kann. Entsprechend werden wir im ersten Fall sagen, dass A im betrachteten Modell gültig ist, und im zweiten Fall, dass das Modell ein Gegenmodell für A ist.

Definition 3.20 Ein *Kripke-Modell* ist ein Tripel $\mathcal{K} := \langle K, \leq, \Vdash \rangle$, bestehend aus einem *Kripke-Modell*
Rahmen $\langle K, \leq \rangle$ und einer *Bewertung* \Vdash .

- Der *Rahmen* $\langle K, \leq \rangle$ besteht aus einer nichtleeren *Zustandsmenge* K und einer *partiellen Ordnungsrelation* \leq auf $K \times K$. *Rahmen*

(Die Relation \leq ist also reflexiv, antisymmetrisch und transitiv; sie ist partiell, da nicht alle Elemente von K in Relation zueinander stehen müssen.)

Die Elemente von K bezeichnen wir als *Zustände* $k_0, k_1, \dots, k, k', k'', \dots$

Zustände

Rahmen $\langle K, \leq \rangle$ sind somit nichtleere partiell geordnete Mengen von Zuständen.

(Zustände werden auch als *Knoten* oder *mögliche Welten* bezeichnet. Es sei $k' \geq k$ lediglich eine andere Schreibweise für $k \leq k'$; man sagt z. B. “ k' erweitert k ” oder “ k sieht k' ”.)

- Eine *Bewertung* \Vdash (lies: *forces*; *Forcing-Relation*) ist eine Relation auf $K \times \text{AS}$, d. h. zwischen Zuständen $k \in K$ und Aussagesymbolen $A \in \text{AS}$, welche der folgenden *Monotoniebedingung* gehorcht:

Bewertung

Monotoniebedingung

$$\text{Wenn } k \Vdash A \text{ und } k' \geq k, \text{ dann } k' \Vdash A.$$

Für Formeln, die keine Aussagesymbole sind, setzen wir die *Forcing-Relation* \Vdash durch folgende Klauseln fort:

$$k \Vdash A \wedge B \iff k \Vdash A \text{ und } k \Vdash B$$

$$k \Vdash A \vee B \iff k \Vdash A \text{ oder } k \Vdash B$$

$$k \Vdash A \rightarrow B \iff \text{Für alle } k' \geq k: \text{ wenn } k' \Vdash A, \text{ dann } k' \Vdash B$$

$$\text{nicht } k \Vdash \perp$$

(Die letzte Klausel ist gleichbedeutend mit $k \not\Vdash \perp$, d. h. es gibt kein Element k aus K , so dass $k \Vdash \perp$.)

Eine Formel A heißt *gültig in* k genau dann, wenn $k \Vdash A$.

gültig in k

Lemma 3.21 (i) $k \Vdash \neg A$ genau dann, wenn für alle Zustände $k' \geq k$ gilt: $k' \not\Vdash A$.

(ii) $k \Vdash \neg\neg A$ genau dann, wenn es für alle Zustände $k' \geq k$ einen Zustand $k'' \geq k'$ gibt, so dass $k'' \Vdash A$.

Beweis. (i) Es ist

$$k \Vdash \neg A \iff k \Vdash A \rightarrow \perp$$

$$\iff \text{für alle } k' \geq k \text{ gilt: wenn } k' \Vdash A, \text{ dann } k' \Vdash \perp \quad (*)$$

$$\iff \text{für alle } k' \geq k \text{ gilt: } k' \not\Vdash A$$

Im letzten Schritt gilt “ \implies ”, da in jedem Modell für jedes k gilt: $k \not\Vdash \perp$. (Aus $(*)$ folgt:

$$\text{für alle } k' \geq k \text{ gilt: wenn } k' \not\Vdash \perp, \text{ dann } k' \not\Vdash A$$

woraus man mit $k \not\Vdash \perp$ (für alle k) erhält: $k' \not\Vdash A$, für alle $k' \geq k$.) Die umgekehrte Richtung erhält man mit *ex falso*.

(ii) Es ist

$$k \Vdash \neg\neg A \iff \text{für alle } k' \geq k \text{ gilt: } k' \not\Vdash \neg A$$

$$\iff \text{für alle } k' \geq k \text{ gilt nicht: für alle } k'' \geq k' \text{ gilt } k'' \not\Vdash A$$

$$\iff \text{für alle } k' \geq k \text{ gibt es ein } k'' \geq k', \text{ so dass } k'' \Vdash A$$

Im letzten Schritt gilt “ \implies ” nur klassisch (sofern wir uns nicht auf endliche Modelle beschränken). QED

Bemerkung. Die Bemerkung am Ende des Beweises von (ii) weist darauf hin, dass es einen Unterschied machen kann, ob wir die Kripke-Semantik aus klassischer oder aus konstruktivistischer Sicht behandeln.

Lemma 3.22 (Monotonie) Für alle $k, k' \in K$ gilt: Wenn $k \Vdash A$ und $k' \geq k$, dann $k' \Vdash A$. (Die für Aussagesymbole formulierte Monotoniebedingung ist also auch für beliebige Formeln A erfüllt.)

Beweis. Per Induktion über dem Aufbau von A .

Induktionsanfang: Sei A atomar. Falls $A \equiv \perp$, gilt die Behauptung trivialerweise, da $k \not\Vdash \perp$. Ist $A \in \text{AS}$, dann gilt die Behauptung aufgrund der Monotoniebedingung in Definition 3.20.

Induktionsannahme: Die Behauptung gelte für Formeln B und C .

Induktionsschritt: Fall $A \equiv B \wedge C$: Angenommen, $k \Vdash B \wedge C$ und $k' \geq k$. Es gilt $k \Vdash B \wedge C$ genau dann, wenn $k \Vdash B$ und $k \Vdash C$. Nach Induktionsannahme gilt dann auch $k' \Vdash B$ und $k' \Vdash C$, also $k' \Vdash B \wedge C$.

Fall $A \equiv B \vee C$: Analog zum vorherigen Fall.

Fall $A \equiv B \rightarrow C$: Angenommen, $k \Vdash B \rightarrow C$ und $k' \geq k$. Betrachte einen beliebigen Zustand k'' , so dass $k'' \geq k'$ und $k'' \Vdash B$. Aufgrund Transitivität von \leq gilt $k'' \geq k$. Wegen $k \Vdash B \rightarrow C$ muss dann auch $k'' \Vdash C$ gelten. Somit gilt für alle Zustände $k'' \geq k'$: Wenn $k'' \Vdash B$, dann $k'' \Vdash C$, d. h. $k' \Vdash B \rightarrow C$. QED

Definition 3.23 Sei $\mathcal{K} := \langle K, \leq, \Vdash \rangle$ ein Kripke-Modell. Wir definieren

Gültigkeit im Modell:

$$\mathcal{K} \Vdash A \iff \text{Für alle } k \in K: k \Vdash A$$

Gültigkeit im Modell

Kripke-Gültigkeit:

$$\Vdash A \iff \text{Für alle Modelle } \mathcal{K}: \mathcal{K} \Vdash A$$

Kripke-Gültigkeit

Bemerkung. Ist k_0 der kleinste Zustand in $\langle K, \leq \rangle$, dann gilt aufgrund Monotonie (Lemma 3.22): A ist gültig in \mathcal{K} genau dann, wenn A gültig in k_0 ist.

Kripke-Modelle $\mathcal{K} = \langle K, \leq, \Vdash \rangle$ können auch diagrammatisch angegeben werden:

- Zustände $k \in K$ schreiben wir dann als Kästchen \boxed{k} .
- Gilt $k \leq k'$ für verschiedene Zustände k, k' , dann schreiben wir



Wir verzichten auf Pfeile, die die Reflexivität oder Transitivität von \leq anzeigen; diese Eigenschaften werden aber stets vorausgesetzt.

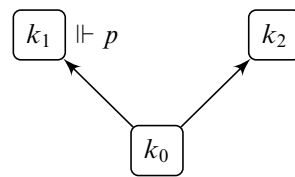
- Welche Aussagesymbole in den Zuständen $k \in K$ gemäß der Bewertung \Vdash gelten, notieren wir bei den Kästchen für die jeweiligen Zustände; gilt z. B. $k \Vdash p$, dann schreiben wir $\boxed{k} \Vdash p$.

Beispiele. (i) Wir zeigen $\not\models \neg\neg p \vee \neg p$. Das heißt, wir müssen ein Kripke-Modell \mathcal{K} angeben, so dass $\mathcal{K} \not\models \neg\neg p \vee \neg p$.

Wir betrachten das Modell $\mathcal{K}_1 = \langle K, \leq, \Vdash \rangle$ mit

- $K = \{k_0, k_1, k_2\}$;
- $k_0 \leq k_1$ und $k_0 \leq k_2$ (neben $k_i \leq k_i$, was wir nicht explizit angeben);
- $k_1 \Vdash p$.

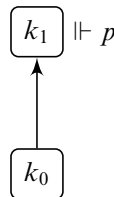
Als Diagramm sieht unser Modell \mathcal{K}_1 wie folgt aus:



Wegen $k_1 \Vdash p$ gilt $k_0 \not\models \neg p$. Für k_2 gilt nur $k_2 \geq k_2$, und $k_2 \not\models p$; mit Lemma 3.21 (i) gilt $k_2 \Vdash \neg p$. Also $k_0 \not\models \neg\neg p$.

Somit gilt $k_0 \not\models \neg\neg p \vee \neg p$, und damit $\mathcal{K}_1 \not\models \neg\neg p \vee \neg p$. Das heißt, \mathcal{K}_1 ist ein Gegenmodell für $\neg\neg p \vee \neg p$; also $\not\models \neg\neg p \vee \neg p$.

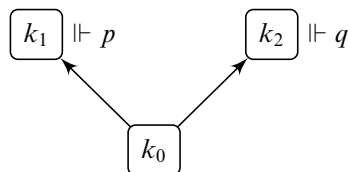
(ii) Wir zeigen $\not\models \neg\neg p \rightarrow p$. Im Kripke-Modell \mathcal{K}_2



gilt $k_0 \not\models p$, und wegen $k_1 \Vdash p$ gilt $k_0 \Vdash \neg\neg p$ (vgl. Lemma 3.21 (ii)).

Somit gilt $k_0 \not\models \neg\neg p \rightarrow p$, und damit $\mathcal{K}_2 \not\models \neg\neg p \rightarrow p$.

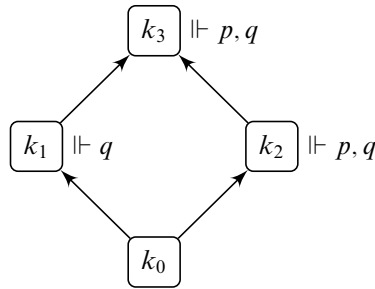
(iii) Wir zeigen $\not\models (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$. Ein Gegenmodell ist \mathcal{K}_3



Da $k_1 \not\models q$, ist $k_0 \not\models p \rightarrow q$, und da $k_2 \not\models p$, ist $k_0 \not\models q \rightarrow p$.

Folglich gilt $k_0 \not\models (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$, und damit $\mathcal{K}_3 \not\models (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$.

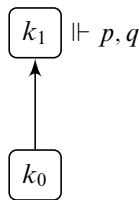
(iv) Wir zeigen $\not\models (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \vee q)$. Im Kripke-Modell \mathcal{K}_4



gilt $k_3 \Vdash p \rightarrow q$, und $k_1 \Vdash p \rightarrow q$ gilt wegen $k_1 \Vdash q$ und $k_3 \Vdash q$. Somit gilt mit $k_0 \not\models p$ und wegen $k_2 \Vdash q$ auch $k_0 \Vdash p \rightarrow q$. Allerdings gilt $k_0 \not\models \neg p$ wegen $k_2 \Vdash p$, und da $k_0 \not\models q$, gilt $k_0 \not\models \neg p \vee q$. Folglich gilt $k_0 \not\models (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \vee q)$, und damit $\mathcal{K}_4 \not\models (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \vee q)$.

Das Kripke-Modell \mathcal{K}_4 illustriert, dass ein Kripke-Modell kein Baum sein muss.

Ein kleineres Gegenmodell ist \mathcal{K}_5 :



Es gilt zwar $k_1 \Vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \vee q)$, doch für k_0 gilt: $k_0 \Vdash p \rightarrow q$, aber $k_0 \not\models \neg p \vee q$. Somit gilt $k_0 \not\models (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \vee q)$, und folglich $\mathcal{K}_5 \not\models (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \vee q)$.

Definition 3.24 Aus Γ folgt logisch A (formal: $\Gamma \Vdash A$), falls für jedes Kripke-Modell $\mathcal{K} = \langle K, \leq, \Vdash \rangle$ in jedem Zustand $k \in K$, in dem Γ gilt, auch A gilt. Das heißt:

*logische
Folgerung*

$$\Gamma \Vdash A \iff \text{Wenn } k \Vdash \Gamma, \text{ dann } k \Vdash A, \text{ für jedes } \mathcal{K}.$$

(Wobei $k \Vdash \Gamma$ genau dann, wenn für alle $B \in \Gamma$ gilt: $k \Vdash B$.)

Theorem 3.25 (Korrektheit und Vollständigkeit) $\Gamma \vdash_{\text{NI}} A$ genau dann, wenn $\Gamma \Vdash A$.

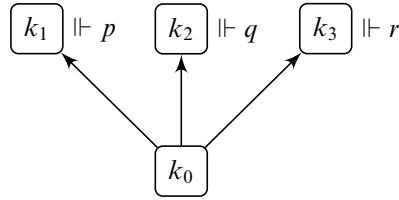
Beweis. Siehe van Dalen (2013, Ch. 5). (Das Resultat geht zurück auf Kripke (1965), der Korrektheit und Vollständigkeit für einen alternativen Kalkül der intuitionistischen Logik gezeigt hat.) QED

Dass eine Formel A in NI nicht ableitbar ist ($\not\vdash_{\text{NI}} A$), kann somit durch Angabe eines Kripke-Gegenmodells für die Formel, bzw. für eine Instanz der Formel, gezeigt werden. Es gilt dann $\not\models A$, und mit Korrektheit folgt $\not\vdash_{\text{NI}} A$.

Beispiel. Wir betrachten die Folgerungsbehauptung

$$\neg p \rightarrow (q \vee r) \Vdash (\neg p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow r)$$

deren Prämisse $\neg p \rightarrow (q \vee r)$ eine Instanz der Prämisse der Harropschen Regel ist, und deren Konklusion $(\neg p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow r)$ eine Instanz der Konklusion dieser Regel ist. Das Kripke-Modell \mathcal{K}



widerlegt diese Folgerungsbehauptung.

- In \mathcal{K} gilt die Prämisse: Wegen $k_1 \Vdash p$ gilt $k_0 \not\Vdash \neg p$, und damit $k_0 \Vdash \neg p \rightarrow (q \vee r)$. Aufgrund Monotonie gilt somit in allen Zuständen $\neg p \rightarrow (q \vee r)$, d. h. $\mathcal{K} \Vdash \neg p \rightarrow (q \vee r)$. (Für k_1, k_2 und k_3 kann man auch wie folgt argumentieren: Da $k_1 \not\Vdash \neg p$, gilt $k_1 \Vdash \neg p \rightarrow (q \vee r)$. Da $k_2 \Vdash q$, gilt $k_2 \Vdash q \vee r$, und damit $k_2 \Vdash \neg p \rightarrow (q \vee r)$. Entsprechend für k_3 , da $k_3 \Vdash r$.)
- Doch \mathcal{K} ist ein Gegenmodell der Konklusion: Es gilt $k_3 \not\Vdash \neg p \rightarrow q$ und $k_2 \not\Vdash \neg p \rightarrow r$. Also gilt in k_0 weder $\neg p \rightarrow q$ noch $\neg p \rightarrow r$, d. h. $k_0 \not\Vdash (\neg p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow r)$. Also $\mathcal{K} \not\Vdash (\neg p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow r)$.

Folglich gilt

$$\neg A \rightarrow (B \vee C) \not\Vdash (\neg A \rightarrow B) \vee (\neg A \rightarrow C)$$

Aufgrund Korrektheit von NI folgt daraus

$$\neg A \rightarrow (B \vee C) \not\Vdash_{\text{NI}} (\neg A \rightarrow B) \vee (\neg A \rightarrow C)$$

d. h. die Harropsche Regel ist in NI nicht ableitbar. Dies vervollständigt den Beweis von Theorem 3.10.

3.8 Rückblick

Wir haben nun schon eine ganze Reihe philosophischer Logiken kennengelernt, oder zumindest angedeutet: *intuitionistische Logik*, *minimale Logik*, *Relevanzlogiken*, *substrukturelle Logiken* und *intermediäre Logiken*, wie z. B. die *Kreisel–Putnam-Logik* und die *Gödel–Dummett-Logik*. Dabei haben wir uns jeweils auf die Aussagenlogik beschränkt; eine Erweiterung zur Quantorenlogik ist aber in jedem Fall möglich, mit entsprechenden Besonderheiten.

Alle diese Logiken basieren auf derselben Sprache, die auch die Sprache der klassischen Logik ist. *Semantisch* haben wir z. B. die intuitionistische von der klassischen Logik dadurch unterschieden, dass wir die logischen Konstanten dieser Sprache unterschiedlich interpretiert haben. *Beweistheoretisch* haben wir verschiedene Logiken durch einfache Einschränkungen von Regeln oder durch Erweiterungen um Regeln oder Axiome erhalten. So haben wir z. B. die intuitionistische Logik aus der klassischen Logik durch eine Einschränkung der Widerspruchsregel auf die Ex-falso-Regel erhalten, und die minimale Logik aus der intuitionistischen durch Weglassen der Ex-falso-Regel. Umgekehrt haben wir intermediäre Logiken durch Hinzunahme von besonderen Regeln oder Axiomen als Erweiterungen der intuitionistischen Logik erhalten. Eine Erweiterung z. B. durch das Axiom $A \vee \neg A$ führt hier zurück zur klassischen Logik.

4 Modale Aussagenlogik

Im Folgenden werden wir uns mit Modallogiken beschäftigen, bei denen eine Spracherweiterung vorgenommen wird. Es kommen also neue logische Konstanten hinzu. Diese Logiken stellen eine Erweiterung der klassischen Logik dar.

Mit "Aussagenlogik" meinen wir im Folgenden immer die in § 2 behandelte *klassische* Aussagenlogik. Diese erweitern wir zur modalen Aussagenlogik.

Literatur

- P. Blackburn, M. de Rijke & Y. Venema (2001), *Modal Logic*. Cambridge University Press.
- M. Fitting & R. L. Mendelsohn (1998), *First-Order Modal Logic*. Dordrecht: Kluwer.
- J. W. Garson (2013), *Modal Logic for Philosophers*. Cambridge University Press.
- R. Girle (2009), *Modal Logics and Philosophy*, 2nd edition. Durham: Acumen.
- G. E. Hughes & M. J. Cresswell (1996), *A New Introduction to Modal Logic*. London: Routledge.

4.1 Vorbemerkungen

Modalitäten sind zusätzliche Bestimmungen bezüglich der Wahrheit von Aussagen. Sie legen der Wahrheit zusätzliche Eigenschaften bei. Beispiele für Modalitäten sind "notwendig" und "möglich", die man auch als *alethische* Modalitäten bezeichnet, da sie sich auf Wahrheit (griech. ἀλήθεια) beziehen. Andere Modalitäten sind die *temporalen*, z. B. "es war einmal der Fall, dass" oder "es wird immer der Fall sein, dass", die *deontischen*, die sich auf Rechte und Pflichten beziehen, wie z. B. "es sollte der Fall sein" oder "es ist verboten", und die *epistemischen* oder *doxastischen*, die sich auf Wissen, Glauben und Meinen beziehen, z. B. "man weiß, dass", "man glaubt, dass".

Am Beispiel der Aussagen "Jeder Gegenstand ist mit sich selbst identisch" (A) und "Tübingen liegt am Neckar" (B) haben wir gesehen (vgl. S. 11), dass "es ist notwendig, dass" kein wahrheitsfunktionaler Operator ist, der im Rahmen der aussagenlogischen Semantik behandelt werden könnte. Denn sowohl A als auch B sind wahr. Jedoch ist die Aussage "Es ist notwendig, dass A " wahr, während die Aussage "Es ist notwendig, dass B " falsch ist.

Zur Behandlung von Modalitäten werden deshalb mögliche Welten betrachtet. Sie werden dadurch charakterisiert, dass in ihnen Aussagen andere Wahrheitswerte haben als z. B. in der realen Welt. Eine Aussage wie "Es ist notwendig, dass B " ist dann wahr, wenn die Aussage B in jeder möglichen Welt wahr ist, andernfalls ist sie falsch. Entsprechend ist die Aussage "Es ist möglich, dass B " wahr, falls es mindestens eine mögliche Welt gibt, in der B wahr ist. In unserem Beispiel ist die Notwendigkeitsaussage falsch, da es mögliche Welten gibt, in denen B falsch ist (nämlich Welten, in denen Tübingen nicht am Neckar liegt). Die Möglichkeitsaussage ist jedoch wahr, da es eine Welt gibt, in der B wahr ist, nämlich die reale.

Für die Bewertungsfunktion h , die Aussagesymbolen Wahrheitswerte zuordnet, bedeutet dies, dass wir diese für jede mögliche Welt extra angeben müssen. Die Funktion h erhält also als zusätzliches Argument den Namen der Welt (z. B. u), für die wir den Wahrheitswert einer Aussage festlegen wollen, z. B. $h(p, u) = w$ ("die Aussage p ist in der Welt u wahr").

Darüber hinaus möchte man bezüglich des Verhältnisses möglicher Welten zueinander gewisse Einschränkungen machen können. Zum Beispiel möchte man sagen können, dass nur solche möglichen Welten relevant sein sollen, in denen dieselben Naturgesetze gelten. Bei temporalen Modalitäten möchte man evtl. nur solche möglichen Welten betrachten, die zukünftige oder vergangene Situationen repräsentieren. Für die Semantik von Modaloperatoren bedeutet dies, dass im Allgemeinen noch eine Relation zwischen Welten berücksichtigt werden muss, die sogenannte Erreichbarkeitsrelation R . Ob eine modallogische Aussage in einer bestimmten Welt wahr oder falsch ist, hängt dann auch von der Relation R ab.

Gegenüber der Semantik für die klassische Aussagenlogik, die im wesentlichen auf der zweiwertigen Bewertungsfunktion $h(A)$ für $A \in AS$ beruht, werden wir bei der Semantik für die Modallogik die folgenden drei Komponenten zu berücksichtigen haben:

- Mengen möglicher Welten W ,
- erweiterte Bewertungsfunktionen $h(A, u)$ für $A \in AS$ und $u \in W$,
- sowie Erreichbarkeitsrelationen R .

4.2 Syntax und Semantik der modalen Aussagenlogik

Definition 4.1 Wir erweitern das Alphabet der Aussagenlogik um die beiden *Modaloperatoren* \Box (“Box”) und \Diamond (“Raute”, “Diamant”), und erweitern die Definition von *Formeln* wie folgt:

Modaloperatoren

- (i) Wenn A eine Formel ist, dann ist auch $\Box A$ eine Formel.
- (ii) Wenn A eine Formel ist, dann auch $\Diamond A$.

Bemerkung. Die *Bindungsstärke* von \Box und \Diamond ist gleich der Bindungsstärke von \neg . Die Modaloperatoren \Box und \Diamond binden also (wie \neg) stärker als \wedge und \vee , die stärker binden als \rightarrow . (Die Formel mit Klammerersparnis $\Box A \rightarrow B$ steht also für die Formel $(\Box A \rightarrow B)$.)

Bindungsstärke

Je nach intendierter Interpretation der Modaloperatoren sprechen wir z. B. auch von “notwendig A ” bei $\Box A$ und von “möglich A ” bei $\Diamond A$.

Definition 4.2 Gegeben sei eine nichtleere Menge W , deren Elemente “(mögliche) Welten”, “(Referenz)punkte” oder “Zustände” genannt werden, und eine zweistellige Relation R auf W (d. h. $R \subseteq W \times W$), die wir “Erreichbarkeits-” oder “Zugänglichkeitsrelation” nennen. Das Paar $\langle W, R \rangle$ heißt *Rahmen*.

Rahmen

Wir verwenden u, v, \dots als Namen für Welten. Falls u und v in Relation R zueinander stehen, schreiben wir uRv , lies: “ v ist von u aus erreichbar” oder “ u sieht v ”.

Definition 4.3 Wir erweitern aussagenlogische Bewertungen wie folgt: Eine *Bewertung* h über W ist eine Funktion, die jedem Aussagesymbol aus AS und jeder Welt in W einen der Wahrheitswerte w oder f zuordnet, d. h. $h : AS \times W \rightarrow \{w, f\}$.

Bewertung

Definition 4.4 Ein (*aussagenlogisches modales*) *Modell* \mathfrak{M} ist ein Tripel $\langle W, R, h \rangle$, bestehend aus einem Rahmen $\langle W, R \rangle$ und einer Bewertung h . Für ein gegebenes Modell $\mathfrak{M} = \langle W, R, h \rangle$ schreiben wir auch $|\mathfrak{M}|$, um die Menge W zu bezeichnen.

Modell

Definition 4.5 Sei \mathfrak{M} das Modell $\langle W, R, h \rangle$. Wir definieren die Relation

$$\mathfrak{M}, u \models A$$

(“ A gilt im Modell \mathfrak{M} in der Welt $u \in W$ ”) wie folgt:

Für Aussagesymbole $A \in \text{AS}$:

$$\langle W, R, h \rangle, u \models A \iff h(A, u) = w$$

(Entsprechend sei $\langle W, R, h \rangle, u \not\models A \iff h(A, u) = f$.)

Für die übrigen aussagenlogischen Formeln:

$$\mathfrak{M}, u \models \top$$

$$\mathfrak{M}, u \not\models \perp$$

$$\mathfrak{M}, u \models \neg A \iff \mathfrak{M}, u \not\models A$$

$$\mathfrak{M}, u \models A \wedge B \iff \mathfrak{M}, u \models A \text{ und } \mathfrak{M}, u \models B$$

$$\mathfrak{M}, u \models A \vee B \iff \mathfrak{M}, u \models A \text{ oder } \mathfrak{M}, u \models B$$

$$\mathfrak{M}, u \models A \rightarrow B \iff \mathfrak{M}, u \not\models A \text{ oder } \mathfrak{M}, u \models B$$

$$\iff \text{Wenn } \mathfrak{M}, u \models A, \text{ dann } \mathfrak{M}, u \models B$$

Für modallogische Formeln:

$$\langle W, R, h \rangle, u \models \Box A \iff \text{Für alle } v \in W: \text{wenn } uRv, \text{ dann } \langle W, R, h \rangle, v \models A$$

$$\langle W, R, h \rangle, u \models \Diamond A \iff \text{Es gibt } v \in W: uRv \text{ und } \langle W, R, h \rangle, v \models A$$

In der Semantik der klassischen Aussagenlogik mussten lediglich Bewertungen von Aussagesymbolen betrachtet werden. Durch jede solche Bewertung ist für jede komplexe aussagenlogische Formel ein Wahrheitswert festgelegt. Jede Bewertung der Aussagesymbole in (einer Zeile) einer Wahrheitstafel legt in diesem Sinne ein Modell fest. Der Wahrheitswert einer komplexen Formel ist eine Funktion allein der Wahrheitswerte der in ihr vorkommenden Teilformeln. Die aussagenlogische Semantik ist also wahrheitsfunktional.

In der eben angegebenen Semantik für die aussagenlogische Modallogik ist dies nicht mehr der Fall. Es genügt nicht mehr die bloße Angabe von Bewertungen $h(A)$ für jedes Aussagesymbol A , sondern es muss für jede Welt $u \in W$ und für jedes Aussagesymbol A eine Bewertung $h(A, u)$ angegeben werden. Darüber hinaus geht auch noch die Relation R mit ein, die für die Interpretation der Modaloperatoren wesentlich ist.

Für beliebige Welten u werden die aussagenlogischen Konstanten $\{\perp, \top, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ hierbei jedoch *klassisch* interpretiert (vgl. Definition 2.8). Für rein aussagenlogische Formeln, d. h. für Formeln, in denen keine Modaloperatoren vorkommen, gelten damit in jeder Welt u die Gesetze der klassischen Aussagenlogik.

In der Metasprache werden wir auch klassisch argumentieren, und insbesondere die metasprachlichen Quantoren “für alle” und “es gibt” klassisch (d. h. nicht-konstruktiv) verstehen.

Definition 4.6 Wir definieren

Gültigkeit im Modell:

$$\mathfrak{M} \models A \iff \text{Für alle } u \in |\mathfrak{M}|: \mathfrak{M}, u \models A$$

Gültigkeit im Rahmen:

$$\langle W, R \rangle \models A \iff \text{Für alle Bewertungen } h: \langle W, R, h \rangle \models A$$

A gilt in \mathfrak{M} in der Welt u

Gültigkeit im Modell

Gültigkeit im Rahmen

Allgemeingültigkeit:

Allgemeingültigkeit

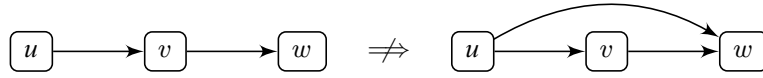
$$\begin{aligned} \models A &: \iff \text{Für alle Rahmen } \langle W, R \rangle: \langle W, R \rangle \models A \\ &\iff \text{Für alle Modelle } \mathfrak{M}: \mathfrak{M} \models A \end{aligned}$$

Modelle $\langle W, R, h \rangle$ können wieder diagrammatisch angegeben werden:

- Welten $u \in W$ schreiben wir als Kästchen \boxed{u} .
- Ist $\langle u, v \rangle \in R$, d. h. gilt uRv , dann zeichnen wir einen Pfeil von \boxed{u} nach \boxed{v} , also $\boxed{u} \xrightarrow{R} \boxed{v}$ (wobei die Beschriftung “ R ” auch weggelassen werden kann).
- Welche Aussagesymbole in den Welten $u \in W$ gemäß der Bewertung h gelten, notieren wir bei den Kästchen für die jeweiligen Welten; ist z. B. $h(p, u) = w$, dann schreiben wir $\boxed{u} \models p$.

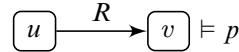
Wir notieren bei einer Welt u lediglich alle Aussagesymbole, die in dieser Welt gelten; für alle nicht notierten Aussagesymbole $A \in \text{AS}$ gilt $h(A, u) = f$.

Bemerkung. Die in der intuitionistischen Logik behandelten Kripke-Modelle $\mathcal{K} = \langle K, \leq, \Vdash \rangle$ stellen einen Spezialfall der hier behandelten Modelle $\langle W, R, h \rangle$ dar. Für die Relation \leq hatten wir Reflexivität und Transitivität vorausgesetzt, und in diagrammatischen Darstellungen auf entsprechende Pfeile verzichtet. Bei den nun zu betrachtenden beliebigen Erreichbarkeitsrelationen R ist diese Voraussetzung nicht in jedem Fall gegeben. Insbesondere folgt aus uRv und vRw allein *nicht* uRw . Diagrammatisch:



Im linken Modell ist $R = \{\langle u, v \rangle, \langle v, w \rangle\}$, im rechten ist $R = \{\langle u, v \rangle, \langle u, w \rangle, \langle v, w \rangle\}$.

Beispiel. Wir betrachten das Modell $\mathfrak{M} = \langle W, R, h \rangle$, wobei $W = \{u, v\}$, $R = \{\langle u, v \rangle\}$ (d. h. uRv) und $h(A, u) = f$ für alle $A \in \text{AS}$, $h(p, v) = w$, und $h(A, v) = f$ für alle $A \in \text{AS} \setminus \{p\}$. Diagramm für \mathfrak{M} :



Gilt $\Box p \rightarrow p$ im Modell \mathfrak{M} in der Welt u ? Das heißt, ist $\mathfrak{M}, u \models \Box p \rightarrow p$? Es ist

$$\mathfrak{M}, u \models \Box p \rightarrow p \iff \mathfrak{M}, u \not\models \Box p \text{ oder } \mathfrak{M}, u \models p$$

Wegen $h(p, u) = f$ gilt $\mathfrak{M}, u \not\models p$, und damit

$$\mathfrak{M}, u \models \Box p \rightarrow p \iff \mathfrak{M}, u \not\models \Box p$$

$\mathfrak{M}, u \not\models \Box p$ gilt genau dann, wenn nicht in allen von u aus erreichbaren Welten p gilt; d. h. wenn es mindestens eine von u aus erreichbare Welt v gibt, in der p nicht gilt. Es ist also (für unser konkretes Modell \mathfrak{M})

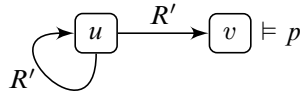
$$\mathfrak{M}, u \models \Box p \rightarrow p \iff \text{Es gibt } w \in W: uRw \text{ und } \mathfrak{M}, w \not\models p$$

In \mathfrak{M} ist jedoch v die einzige von u aus erreichbare Welt, und in v gilt p . Die rechte

Seite ist also falsch: es gibt keine von u aus erreichbare Welt, in der p nicht gilt. Also ist $\mathfrak{M}, u \not\models \Box p \rightarrow p$, d. h. $\Box p \rightarrow p$ gilt im Modell \mathfrak{M} in der Welt u nicht.

Folglich ist $\Box p \rightarrow p$ auch nicht gültig im Modell \mathfrak{M} (es gilt $\mathfrak{M} \not\models \Box p \rightarrow p$), und somit auch nicht allgemeingültig (es gilt $\not\models \Box p \rightarrow p$).

Nun modifizieren wir das Modell \mathfrak{M} , indem wir R zu $R' = \{\langle u, u \rangle, \langle u, v \rangle\}$ erweitern; es ist nun also $uR'u$ und $uR'v$. Das resultierende Modell heiße \mathfrak{M}' . Als Diagramm:



Gilt $\mathfrak{M}', u \models \Box p \rightarrow p$? Es ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}', u \models \Box p \rightarrow p &\iff \mathfrak{M}', u \not\models \Box p \text{ oder } \mathfrak{M}', u \models p \\ &\iff \mathfrak{M}', u \not\models \Box p \\ &\iff \text{Es gibt } w \in W: uR'w \text{ und } \mathfrak{M}', w \not\models p \end{aligned}$$

Nun ist die rechte Seite wahr, denn für $u (= w)$ gilt $uR'u$ und $\mathfrak{M}', u \not\models p$. Es ist also $\mathfrak{M}', u \models \Box p \rightarrow p$.

Gilt auch $\mathfrak{M}' \models \Box p \rightarrow p$? Dazu müssen wir noch überprüfen, ob $\mathfrak{M}', v \models \Box p \rightarrow p$ gilt. Es ist

$$\mathfrak{M}', v \models \Box p \rightarrow p \iff \mathfrak{M}', v \not\models \Box p \text{ oder } \mathfrak{M}', v \models p$$

$\mathfrak{M}', v \not\models \Box p$ ist falsch, da es keine von v aus erreichbare Welt gibt, in der p nicht gilt. $\mathfrak{M}', v \models p$ ist jedoch wahr, da $h(p, v) = w$. Also gilt auch $\mathfrak{M}', v \models \Box p \rightarrow p$. Damit gilt für alle $w \in |\mathfrak{M}'|$: $\mathfrak{M}', w \models \Box p \rightarrow p$, d. h. $\mathfrak{M}' \models \Box p \rightarrow p$.

Wie schon festgestellt, ist $\Box p \rightarrow p$ jedoch nicht allgemeingültig, da $\Box p \rightarrow p$ nicht in jedem Modell gültig ist; \mathfrak{M} ist ein Gegenmodell.

Bemerkung. Ist von einer Welt aus keine (andere oder dieselbe) Welt erreichbar (führen im Diagramm also aus einer Welt keine Pfeile heraus), so ist in dieser Welt jede Aussage der Form $\Box A$ gültig. Es ist

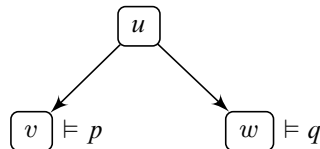
$$\mathfrak{M}, u \models \Box A \iff \text{Für alle } v \in W: \text{wenn } uRv, \text{ dann } \mathfrak{M}, v \models A$$

Für eine "Sackgasse" u gilt jedoch für alle $v \in W$, dass $\langle u, v \rangle \notin R$, d. h. dass uRv falsch ist, und somit die rechte Seite wahr ist.

Insbesondere gilt für solche Welten u auch $\mathfrak{M}, u \models \Box \perp$. Ist $R = \emptyset$, gilt sogar $\mathfrak{M} \models \Box \perp$.

Beispiel. Ist die Formel $\Box(p \vee q) \rightarrow (\Box p \vee \Box q)$ allgemeingültig?

Wir betrachten das Modell $\mathfrak{M} = \langle W, R, h \rangle$, wobei $W = \{u, v, w\}$, $R = \{\langle u, v \rangle, \langle u, w \rangle\}$ (d. h. uRv und uRw) und $h(p, u) = w$, $h(q, w) = w$; für alle übrigen Aussagesymbole sei $h = f$ für alle Welten. Als Diagramm:



Es gilt $\mathfrak{M}, u \models \Box(p \vee q)$, denn mit $\mathfrak{M}, v \models p$ gilt wegen

$$\mathfrak{M}, v \models p \vee q \iff \mathfrak{M}, v \models p \text{ oder } \mathfrak{M}, v \models q$$

auch $\mathfrak{M}, v \models p \vee q$, mit $\mathfrak{M}, w \models q$ entsprechend $\mathfrak{M}, w \models p \vee q$, und v und w sind alle von u aus erreichbaren Welten.

Jedoch gilt $\Box p \vee \Box q$ in u nicht. Es ist $\mathfrak{M}, u \not\models \Box p$, da $\mathfrak{M}, w \not\models p$, und $\mathfrak{M}, u \not\models \Box q$, da $\mathfrak{M}, v \not\models q$.

Wegen

$$\mathfrak{M}, u \models \Box(p \vee q) \rightarrow (\Box p \vee \Box q) \iff \mathfrak{M}, u \not\models \Box(p \vee q) \text{ oder } \mathfrak{M}, u \models \Box p \vee \Box q$$

ist somit $\mathfrak{M}, u \not\models \Box(p \vee q) \rightarrow (\Box p \vee \Box q)$. Folglich ist die Formel nicht gültig in \mathfrak{M} und daher auch nicht allgemeingültig.

In den bisherigen Beispielen haben wir nur Formeln betrachtet, für die wir durch Angabe geeigneter Modelle nachweisen konnten, dass sie *nicht* gültig sind. Im folgenden Beispiel zeigen wir nun die Allgemeingültigkeit einer Formel.

Beispiel. Wir wollen zeigen, dass

$$\models \Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$$

Dazu müssen wir nachweisen, dass $\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$ in jedem Modell in jeder Welt gültig ist.

Sei $\mathfrak{M} = \langle W, R, h \rangle$ ein Modell, wobei $u \in W$. Wir nehmen an, dass $\mathfrak{M}, u \models \Box(p \wedge q)$. Sei w eine beliebige Welt in W , für die uRw gilt. Mit der Annahme $\mathfrak{M}, u \models \Box(p \wedge q)$ folgt dann $\mathfrak{M}, w \models p \wedge q$, und wegen

$$\mathfrak{M}, w \models p \wedge q \iff \mathfrak{M}, w \models p \text{ und } \mathfrak{M}, w \models q$$

$\mathfrak{M}, w \models p$ und $\mathfrak{M}, w \models q$. Da w beliebig, gilt dies für alle von u aus erreichbaren Welten. Somit gilt in u auch $\Box p$ und $\Box q$. Daraus folgt $\mathfrak{M}, u \models \Box p \wedge \Box q$, und schließlich $\mathfrak{M}, u \models \Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$, für beliebige u und \mathfrak{M} . Folglich $\models \Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$.

Theorem 4.7 *Die Modallogik ist eine konservative Erweiterung der Aussagenlogik. Das heißt, es gilt für alle Formeln A , in denen keine Modaloperatoren vorkommen, dass A aussagenlogisch allgemeingültig ist genau dann, wenn A modallogisch allgemeingültig ist.*

Beweis. Übungsaufgabe.

Hinweis: Sei h eine modallogische Bewertung. Sei $h_u(A) := h(A, u)$ (für $A \in \text{AS}$). Dann gilt

$$h_u \models A \iff \langle W, R, h \rangle, u \models A$$

falls A keine Modaloperatoren enthält.

QED

4.3 Logische Folgerung

In der klassischen Aussagenlogik haben wir logische Folgerung wie folgt definiert (siehe Definition 2.10):

$$\Gamma \models A \iff \text{Für alle Bewertungen } h: \text{ wenn } h \models \Gamma, \text{ dann } h \models A$$

Mit anderen Worten, $\Gamma \vDash A$ genau dann, wenn in jedem Modell, in dem die Prämissen Γ gelten, auch die Konklusion A gilt.

In der intuitionistischen Aussagenlogik haben wir logische Folgerung für Kripke-Modelle $\mathcal{K} = \langle K, \leq, \Vdash \rangle$ und Zustände $k \in K$ definiert durch (siehe Definition 3.24):

$$\Gamma \Vdash A \iff \text{Wenn } k \Vdash \Gamma, \text{ dann } k \Vdash A, \text{ für jedes } \mathcal{K}$$

Hier beruht logische Folgerung nicht auf Gültigkeit im Modell (" $\mathcal{K} \Vdash A$ "), sondern auf *Gültigkeit in \mathcal{K} im Zustand k* .

In der Modallogik stellt sich die Frage, welchen Gültigkeitsbegriff man für die logische Folgerungsbeziehung zugrunde legen möchte:

- (i) Legt man Gültigkeit im Modell \mathfrak{M} zugrunde, dann wird logische Folgerung definiert durch

$$\Gamma \vDash^g A \iff \text{Wenn } \mathfrak{M} \vDash \Gamma, \text{ dann } \mathfrak{M} \vDash A$$

Diesen Begriff nennt man *globale logische Folgerung*.

globale logische Folgerung

- (ii) Legt man Gültigkeit im Modell \mathfrak{M} in der Welt u (d. h. " $\mathfrak{M}, u \vDash A$ ") zugrunde, so lautet die Definition der logischen Folgerung

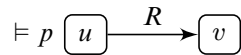
$$\Gamma \vDash^l A \iff \text{Wenn } \mathfrak{M}, u \vDash \Gamma, \text{ dann } \mathfrak{M}, u \vDash A$$

Diesen Begriff der logischen Folgerung nennt man *lokal*, da logische Folgerung hier punkt- bzw. weltweise definiert wird.

lokale logische Folgerung

Die beiden Begriffe sind offensichtlich nicht äquivalent:

- Für (i) gilt z. B. $p \vDash^g \Box p$: Angenommen $\mathfrak{M} \vDash p$, d. h. für alle $u \in |\mathfrak{M}|$ gilt $h(p, u) = w$. Seien v, w beliebige Welten in $|\mathfrak{M}|$, wobei $v = w$ sein kann. Es ist entweder $\langle v, w \rangle \in R$ oder $\langle v, w \rangle \notin R$. Im ersten Fall gilt $\mathfrak{M}, v \vDash \Box p$, da p in jeder Welt w gilt. Im zweiten Fall gilt ebenfalls $\mathfrak{M}, v \vDash \Box p$, da v dann eine "Sackgasse" ist. Es gilt also $\mathfrak{M} \vDash p \implies \mathfrak{M} \vDash \Box p$.
- Für (ii) gilt jedoch $p \not\vDash^l \Box p$, denn im Modell



ist $\mathfrak{M}, u \vDash p$, aber $\mathfrak{M}, u \not\vDash \Box p$, also $\mathfrak{M}, u \vDash p \not\implies \mathfrak{M}, u \vDash \Box p$.

Globale Folgerung impliziert also nicht lokale Folgerung. Es gilt jedoch die Umkehrung, d. h. $\Gamma \vDash^l A \implies \Gamma \vDash^g A$: Das Definieren von $\Gamma \vDash^l A$ hat die Form

$$\forall u(P(u) \rightarrow Q(u)) \tag{A}$$

während das Definieren von $\Gamma \vDash^g A$ die Form

$$\forall u P(u) \rightarrow \forall u Q(u) \tag{B}$$

hat: (A) impliziert (B), aber nicht umgekehrt.

Wir interessieren uns im Weiteren hauptsächlich für den *lokalen* logischen Folgerungsbegriff (i) und verwenden daher die folgende Definition (ohne den Index l).

Definition 4.8 Aus Γ folgt (modal-)logisch A (formal: $\Gamma \vDash A$), falls in jedem Modell \mathfrak{M} und in jeder Welt $u \in |\mathfrak{M}|$, in der Γ gilt, auch A gilt. Das heißt: logische
Folgerung

$$\Gamma \vDash A \iff \text{Wenn } \mathfrak{M}, u \vDash \Gamma, \text{ dann } \mathfrak{M}, u \vDash A$$

Zwei Formeln A und B sind *logisch äquivalent*, wenn B aus A und A aus B logisch folgt: logisch äquivalent

$$A \vDash B \iff A \vDash B \text{ und } B \vDash A$$

Bemerkung. Es gilt $\Box A \vDash \neg \Diamond \neg A$ und $\Diamond A \vDash \neg \Box \neg A$. (Übungsaufgabe; vgl. Quantorenlogik.) Per Definition $\Box A := \neg \Diamond \neg A$ oder $\Diamond A := \neg \Box \neg A$ kann somit auf einen der beiden Modaloperatoren verzichtet werden, ohne dadurch die Ausdrucksstärke der Sprache der Modallogik einzuschränken.

Viele Eigenschaften der aussagenlogischen Folgerung gelten auch für die modallogische Folgerung; z. B. Monotonie und Kompaktheit:

Theorem 4.9 Die Folgerungsrelation ist monoton, d. h. wenn $\Gamma \vDash A$, dann gilt für $\Gamma' \supseteq \Gamma$ auch $\Gamma' \vDash A$.

Theorem 4.10 Die Folgerungsrelation ist kompakt, d. h. wenn $\Gamma \vDash A$, dann gibt es eine endliche Menge $\Gamma' \subseteq \Gamma$, so dass $\Gamma' \vDash A$.

Das Import-Export-Theorem gilt ebenfalls:

Theorem 4.11 $\Gamma, A \vDash B \iff \Gamma \vDash A \rightarrow B$.

Bemerkung. Das Theorem gilt jedoch *nicht* für den *globalen* logischen Folgerungsbegriff. Es gilt aber mit $\Box^n A := \underbrace{\Box \dots \Box}_n A$:

$$\Gamma, A \vDash^g B \iff \text{Es gibt ein } n, \text{ so dass } \Gamma \vDash^g (\Box^0 A \wedge \Box^1 A \wedge \dots \wedge \Box^n A) \rightarrow B$$

4.4 Einige Standardmodallogiken

Bisher haben wir lediglich *eine* Modallogik semantisch spezifiziert. In ihr sind genau jene Formeln allgemeingültig, die in allen Rahmen $\langle W, R \rangle$ gültig sind. Durch geeignete Einschränkungen bezüglich der Rahmen, und insbesondere der Erreichbarkeitsrelation R , können verschiedene Modallogiken charakterisiert werden. Im Folgenden betrachten wir einige Standardmodallogiken.

Definition 4.12 Ein Modell \mathfrak{M} *beruht auf* einem Rahmen $\langle W, R \rangle$, falls $\mathfrak{M} = \langle W, R, h \rangle$. \mathfrak{M} *beruht auf* $\langle W, R \rangle$

Definition 4.13 Ein Rahmen $\langle W, R \rangle$ *hat eine Relationseigenschaft*, falls die Erreichbarkeitsrelation R sie hat. Wir sprechen dann auch von einer *Rahmeneigenschaft*. Ein Rahmen $\langle W, R \rangle$ ist $\langle W, R \rangle$ *hat Relationseigenschaft*

- (i) *reflexiv*, falls für alle $u \in W$: uRu ;
- (ii) *symmetrisch*, falls für alle $u, v \in W$: wenn uRv , dann vRu ;
- (iii) *transitiv*, falls für alle $u, v, w \in W$: wenn uRv und vRw , dann uRw ;
- (iv) *seriell*, falls es für alle $u \in W$ ein $v \in W$ gibt, so dass uRv .

Ist ein Rahmen reflexiv, symmetrisch und transitiv, so heißt er *Äquivalenzrahmen*.

Äquivalenzrahmen

Definition 4.14 Gültigkeit im Rahmen hatten wir wie folgt definiert:

$$\langle W, R \rangle \models A \iff \text{Für alle Bewertungen } h: \langle W, R, h \rangle \models A$$

Das heißt, eine Formel A ist gültig in einem Rahmen $\langle W, R \rangle$, falls A in jedem Modell $\langle W, R, h \rangle$ gültig ist, das auf dem Rahmen $\langle W, R \rangle$ beruht.

(i) Sei S eine Klasse von Rahmen. Eine Formel A ist *S-gültig*, falls A in jedem Rahmen aus S gültig ist. *S-gültig*

(ii) Ist S eine Klasse von Rahmen mit Relationseigenschaft s und \mathfrak{M}_S ein Modell, das auf einem Rahmen in S beruht, so ist durch

$$\Gamma \vDash_s A \iff \text{Für alle } \mathfrak{M}_S \text{ und alle } u \in |\mathfrak{M}_S|: \text{Wenn } \mathfrak{M}_S, u \vDash \Gamma, \text{ dann } \mathfrak{M}_S, u \vDash A$$

eine logische *Folgerungsrelation* definiert.

Folgerungsrelationen

Bemerkung. Wir schreiben z. B. $\Gamma \vDash_{\text{refl}} A$, um auszudrücken, dass A für reflexive Rahmen aus Γ logisch folgt, oder $\Gamma \vDash_{\text{äq}} A$, um zu sagen, dass A für Äquivalenzrahmen aus Γ folgt.

Bestimmte Rahmeneigenschaften können durch modallogische Formeln charakterisiert werden. Umgekehrt können bestimmte S -gültige Formeln durch Rahmeneigenschaften s charakterisiert werden.

Theorem 4.15 *Es gilt:*

- (i) $\langle W, R \rangle \models \Box A \rightarrow A \iff R$ ist reflexiv.
- (ii) $\langle W, R \rangle \models A \rightarrow \Box \Diamond A \iff R$ ist symmetrisch.
- (iii) $\langle W, R \rangle \models \Box A \rightarrow \Box \Box A \iff R$ ist transitiv.
- (iv) $\langle W, R \rangle \models \Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A \iff R$ ist euklidisch (wobei eine Relation R euklidisch heißt, falls mit uRv und uRw auch vRw gilt).

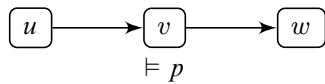
Beweis. (i) Wir zeigen per Kontraposition: $\langle W, R \rangle \models \Box A \rightarrow A \implies R$ ist reflexiv. Angenommen, R ist nicht reflexiv. Dann gibt es in jedem Rahmen $\langle W, R \rangle$ ein $u \in W$, so dass $\langle u, u \rangle \notin R$. Sei nun $h(p, v) = w$ für alle $v \in W \setminus \{u\}$. Dann gilt in u zwar $\Box p$, aber nicht p . Somit gilt in u nicht $\Box p \rightarrow p$.

Zum Nachweis von

$$R \text{ ist reflexiv} \implies \langle W, R \rangle \models \Box A \rightarrow A$$

nehmen wir $\langle W, R \rangle \models \Box A$ an. Das heißt, in jeder Welt $u \in W$ gilt $\Box A$. Ist R reflexiv, so muss folglich in jeder Welt u auch A gelten. Also gilt $\langle W, R \rangle \models \Box A \rightarrow A$.

(iii) Wir zeigen per Kontraposition: $\langle W, R \rangle \models \Box A \rightarrow \Box \Box A \implies R$ ist transitiv. Angenommen, R ist nicht transitiv. Dann gibt es $u, v, w \in W$, so dass uRv und vRw , aber nicht uRw . Setze $h(p, v) = w$, $h(p, u) = h(p, w) = f$; ansonsten sei h beliebig. Der uns interessierende Teil eines solchen Modells ist:



In u gilt $\Box p$, da u nur v sieht, wo p gilt. In u gilt aber nicht $\Box\Box p$, da dafür $\Box p$ in v gelten müsste. Dazu müsste jedoch p in w gelten. Da dies nicht der Fall ist, kann $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ nicht in u gelten. Somit gilt $\langle W, R, h \rangle, u \models \Box p$, aber $\langle W, R, h \rangle, u \not\models \Box\Box p$.

Zum Nachweis von

$$R \text{ ist transitiv} \implies \langle W, R \rangle \models \Box A \rightarrow \Box\Box A$$

betrachten wir beliebige voneinander verschiedene Welten $u, v, w \in W$ mit uRv und vRw . Angenommen $\Box A$ gilt in u . Dann muss A aufgrund uRv in v gelten. Wegen vRw und Transitivität muss dann A auch in w gelten. Somit gilt $\Box A$ auch in v , da A in allen von v aus erreichbaren Welten w gilt. Wegen uRv gilt damit in u auch $\Box\Box A$. Also $\langle W, R \rangle \models \Box A \rightarrow \Box\Box A$.

Beweis von (ii) und (iv) als Übungsaufgabe.

QED

Durch Klassen S von Rahmen können Mengen S -gültiger Formeln, d. h. Logiken, charakterisiert werden. Einige *Standardmodallogiken* sind:

Standardmodallogiken

Logik	Rahmeneigenschaften
K	keine
D	seriell
T	reflexiv
B	reflexiv und symmetrisch
K4	transitiv
S4	reflexiv und transitiv
S5	reflexiv, symmetrisch und transitiv

Die Buchstaben K, D, T usw. werden nicht nur als Namen für die jeweilige Logik verwendet, sondern auch, um die entsprechenden Klassen von Rahmen zu bezeichnen. Man spricht dann z. B. von S5-Rahmen, um die Klasse aller Äquivalenzrahmen zu bezeichnen.

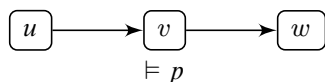
Eine Logik kann allerdings auch durch verschiedene Klassen von Rahmen charakterisiert sein. Ein Beispiel ist die Logik S5, die nicht nur durch Äquivalenzrahmen charakterisiert ist, sondern auch durch die Klasse der universellen Rahmen $\langle W, R \rangle$, in denen uRv für alle $u, v \in W$ gilt; in einem universellen Rahmen sieht also jede Welt alle Welten. Äquivalenzrahmen und universelle Rahmen induzieren verschiedene Arten von Modellen. Im Fall von Äquivalenzrahmen wird W in disjunkte Teilmengen partitioniert. In jeder dieser Teilmengen sieht jede Welt zwar jede Welt (d. h. die auf die jeweiligen Teilmengen beschränkten Erreichbarkeitsrelationen sind universell), aber es ist keine Welt in einer der anderen Teilmengen erreichbar (d. h. R selbst ist nicht universell). Nur bei Äquivalenzrahmen mit lediglich einer Partition (nämlich W selbst) ist R universell. Im Fall von universellen Rahmen liegt hingegen keine solche Partitionierung vor. Ist nun $\mathfrak{M}_{\text{äq}} = \langle W, R, h \rangle$ ein auf einem Äquivalenzrahmen beruhendes Gegenmodell für eine Formel A , so muss es in einer Teilmenge W' von W eine Welt u geben, in der A nicht gilt. Für diese Teilmenge W' erhalten wir mit $\mathfrak{M}_{\text{uni}} = \langle W', R', h' \rangle$ ein auf einem universellen Rahmen beruhendes Gegenmodell für A , wobei R' und h' sich von R und h nur durch deren Beschränkung auf W' unterscheiden. Umgekehrt liegt mit einem Gegenmodell $\mathfrak{M}_{\text{uni}}$ für A unmittelbar auch ein Gegenmodell $\mathfrak{M}_{\text{äq}}$ für A vor. Folglich charakterisieren sowohl Äquivalenzrahmen als auch universelle Rahmen die Logik S5.

Bisher haben wir lediglich die Logik K betrachtet, da wir Allgemeingültigkeit durch Gültigkeit in *allen* Rahmen definiert haben, also keinerlei Einschränkungen bezüglich der Erreichbarkeitsrelation vorgenommen haben.

K ist die stärkste Modallogik insofern, als dass K -gültige Formeln nicht nur in allen Rahmen mit einer bestimmten Rahmeneigenschaft gelten müssen, sondern in allen Rahmen überhaupt. Die Menge der K -gültigen Formeln ist also eine Teilmenge jeder anderen Menge S -gültiger Formeln (in diesem Sinne ist K die schwächste Modallogik).

Für die angegebenen Standardmodallogiken gelten folgende Beziehungen:

- (i) Es ist $\not\models_K \Box A \rightarrow \Box\Box A$, denn durch



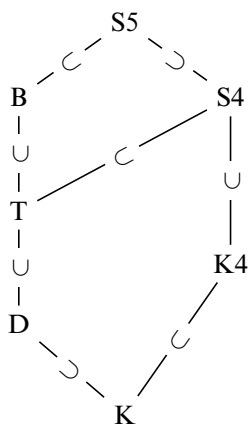
ist ein Gegenmodell für die K -Gültigkeit von $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ gegeben.

Es gilt jedoch $\models_{K4} \Box A \rightarrow \Box\Box A$ (vgl. Beweis von 4.15 (iii)). Da alle K -gültigen Formeln auch $K4$ -gültig sind, ist $K4$ somit eine echte Erweiterung von K .

Die Formel $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ ist auch $S4$ - und $S5$ -gültig, da $S4$ und $S5$ ebenfalls die Rahmeneigenschaft der Transitivität haben.

- (ii) Jede $K4$ -gültige Formel ist auch $S4$ -gültig, da jede in einem transitiven Rahmen gültige Formel auch in einem Rahmen gilt, der transitiv und reflexiv ist. $K4$ ist also eine Teilmenge von $S4$.
- (iii) Entsprechend sind B und $S4$ Teilmengen von $S5$, und T ist eine Teilmenge von $S4$.
- (iv) Da jeder reflexive Rahmen auch seriell ist, ist D eine Teilmenge von T . Obgleich nicht jeder serielle Rahmen auch reflexiv ist, könnte es dennoch sein, dass auch T eine Teilmenge von D ist, die beiden Logiken D und T also gleich sind (vgl. den Fall zweier Charakterisierungen von $S5$). Dies ist hier jedoch nicht der Fall: $\Box p \rightarrow p$ ist ein Beispiel für eine T -gültige Formel, die nicht D -gültig ist.

Unter Hinzunahme weiterer Überlegungen ergibt sich folgendes Bild:



(Es sind alle Teilmengebenebeziehungen angegeben, die zwischen den betrachteten Logiken bestehen.)

4.5 Modallogische Hilberttypkalküle

Neben der semantischen Spezifizierung von Modallogiken können diese auch axiomatisch durch Hilberttypkalküle angegeben werden. Wir verwenden \Box als Grundzeichen und definieren $\Diamond A := \neg\Box\neg A$.

4.5.1 Hilberttypkalkül für K

Definition 4.16 Der Hilberttypkalkül für K ist gegeben durch:

Hilberttypkalkül für K

Axiome:

- Alle aussagenlogischen Tautologien, sowie deren modallogische Substitutionsinstanzen.
- Axiomenschema K: $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

Regeln:

Modus Ponens: $\frac{A \rightarrow B \quad A}{B}$ Nezesitation: $\frac{A}{\Box A}$

Bemerkungen. (i) Mit der aussagenlogischen Tautologie $A \vee \neg A$ ist z. B. auch $\Box\Diamond A \vee \neg\Box\Diamond A$ ein Axiom, da Letzteres eine modallogische Substitutionsinstanz (d. h., eine Substitutionsinstanz in der Sprache der Modallogik) der aussagenlogischen Tautologie ist.

(ii) Die aussagenlogischen Tautologien wurden semantisch bestimmt (vgl. Definition 2.9). Dem Kalkül scheint deshalb ein semantischer Begriff zugrunde zu liegen. Hier wollen wir jedoch voraussetzen, dass die aussagenlogischen Tautologien axiomatisch bestimmt sind, z. B. durch folgende Axiomenschemata:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \\ (A \wedge B) \rightarrow A \\ (A \wedge B) \rightarrow B \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow (A \vee B) \\ B \rightarrow (A \vee B) \\ (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow (B \rightarrow A) \\ (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A) \\ \neg\neg A \rightarrow A \end{array} \right.$$

(iii) Die Nezesitationsregel darf nicht mit der (nicht allgemeingültigen) Formel $A \rightarrow \Box A$ verwechselt werden. Um die Regel anwenden zu können, muss die Prämisse A im Kalkül erzeugt worden sein. Die Prämisse kann also nicht wie in $A \rightarrow \Box A$ eine beliebige Formel sein. Man überzeugt sich leicht, dass z. B. Aussagesymbole nicht als Prämisse der Nezesitationsregel vorkommen können.

Definition 4.17 Eine *Ableitung* ist eine endliche Folge von Formeln, die entweder Axiome oder durch Regeln erzeugte Formeln sind.

Ableitung

Bemerkung. Bei der Angabe von Ableitungen verwenden wir zusätzlich Zeilennummern und Kommentare, die aber nicht zur eigentlichen Ableitung gehören.

Der Kalkül kann um sogenannte *abgeleitete Regeln* erweitert werden, durch die Ableitungen verkürzt werden können.

abgeleitete Regel

Beispiele. (i) Die Regularitätsregel

$$\frac{A \rightarrow B}{\Box A \rightarrow \Box B}$$

ist eine abgeleitete Regel, denn jede Anwendung dieser Regel in einer Ableitung kann durch folgende (Teil-)Ableitung ersetzt werden:

- | | | |
|-----------|---|---|
| <i>k.</i> | $A \rightarrow B$ | Formel in Ableitung |
| <i>l.</i> | $\Box(A \rightarrow B)$ | Nezessitation auf Zeile <i>k</i> |
| <i>m.</i> | $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$ | Axiom K |
| <i>n.</i> | $\Box A \rightarrow \Box B$ | Modus Ponens auf Zeilen <i>l</i> und <i>m</i> |

- (ii) Unter Verwendung des Axiomenschemas $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$ erhalten wir die Schnittregel

$$\frac{A \rightarrow B \quad B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$$

als abgeleitete Regel:

- | | | |
|-----------|---|--|
| <i>i.</i> | $A \rightarrow B$ | Formel in Ableitung |
| <i>j.</i> | $B \rightarrow C$ | Formel in Ableitung |
| <i>k.</i> | $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$ | Axiom |
| <i>l.</i> | $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$ | Modus Ponens auf <i>i</i> und <i>k</i> |
| <i>m.</i> | $(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ | Axiom |
| <i>n.</i> | $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ | Modus Ponens auf <i>j</i> und <i>m</i> |
| <i>o.</i> | $A \rightarrow C$ | Modus Ponens auf <i>l</i> und <i>n</i> |

- Beispiele.** (i) Wir geben eine Ableitung in K von $\Box(A \wedge B) \rightarrow (\Box A \wedge \Box B)$ an:

- | | | |
|----|---|--------------------------|
| 1. | $(A \wedge B) \rightarrow A$ | Axiom |
| 2. | $\Box(A \wedge B) \rightarrow \Box A$ | Regularität auf 1 |
| 3. | $(A \wedge B) \rightarrow B$ | Axiom |
| 4. | $\Box(A \wedge B) \rightarrow \Box B$ | Regularität auf 3 [Axiom |
| 5. | $(\Box(A \wedge B) \rightarrow \Box A) \rightarrow ((\Box(A \wedge B) \rightarrow \Box B) \rightarrow (\Box(A \wedge B) \rightarrow (\Box A \wedge \Box B)))$ | |
| 6. | $(\Box(A \wedge B) \rightarrow \Box B) \rightarrow (\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box(A \wedge B)$ | Modus Ponens auf 2 und 5 |
| 7. | $\Box(A \wedge B) \rightarrow (\Box A \wedge \Box B)$ | Modus Ponens auf 4 und 6 |

In Zeile 5 haben wir eine modallogische Substitutionsinstanz der aussagenlogischen Tautologie $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C)))$ verwendet.

- (ii) Eine Ableitung in K von $\Box A \rightarrow \neg \Diamond \neg A$ ist:

- | | | |
|----|--|---------------------------------|
| 1. | $A \rightarrow \neg \neg A$ | Axiom |
| 2. | $\Box A \rightarrow \Box \neg \neg A$ | Regularität auf 1 [Axiom |
| 3. | $(\Box A \rightarrow \Box \neg \neg A) \rightarrow ((\Box A \rightarrow (\Box \neg \neg A \rightarrow \neg \neg \Box \neg \neg A)) \rightarrow (\Box A \rightarrow \neg \neg \Box \neg \neg A))$ | |
| 4. | $(\Box A \rightarrow (\Box \neg \neg A \rightarrow \neg \neg \Box \neg \neg A)) \rightarrow (\Box A \rightarrow \neg \neg \Box \neg \neg A)$ | Mod. Ponens auf 2, 3 |
| 5. | $\Box A \rightarrow (\Box \neg \neg A \rightarrow \neg \neg \Box \neg \neg A)$ | Axiom |
| 6. | $\Box A \rightarrow \neg \neg \Box \neg \neg A$ | Modus Ponens auf 4 und 5 |
| 7. | $\Box A \rightarrow \neg \Diamond \neg A$ | Definition von \Diamond auf 6 |

Die Formel in Zeile 1 ist eine aussagenlogische Tautologie. Die Formel in Zeile 3 ist eine Instanz des Axiomenschemas $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$. In Zeile 5 wurde eine modallogische Substitutionsinstanz der aussagenlogischen Tautologie $A \rightarrow (B \rightarrow \neg \neg B)$ verwendet.

- (iii) Unter Verwendung der Schnittregel geben wir eine Ableitung von $\neg \Diamond \neg A \rightarrow \Box A$ in K an:

1. $\neg\neg\Box\neg\neg A \rightarrow \Box\neg\neg A$ Axiom
2. $\neg\neg A \rightarrow A$ Axiom
3. $\Box\neg\neg A \rightarrow \Box A$ Regularität auf 2
4. $\neg\neg\Box\neg\neg A \rightarrow \Box A$ Schnitt auf 1 und 3
5. $\neg\Diamond\neg A \rightarrow \Box A$ Definition von \Diamond auf 4

Neben der Verwendung abgeleiteter Regeln können Ableitungen auch durch Verwendung des folgenden Ersetzungstheorems abgekürzt werden. Wir sagen, dass $A \leftrightarrow B$ eine Ableitung hat, falls $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$ Ableitungen haben. Da z. B. $\Box A \rightarrow \neg\Diamond\neg A$ und $\neg\Diamond\neg A \rightarrow \Box A$ ableitbar sind, hat somit auch $\Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$ eine Ableitung.

Theorem 4.18 (Ersetzungstheorem) Sei A eine Teilformel von B , und sei die Formel B' das Resultat einer Ersetzung von A in B durch eine Formel A' . Wenn $A \leftrightarrow A'$ eine Ableitung hat, dann hat auch $B \leftrightarrow B'$ eine Ableitung.

Beweis. Übungsaufgabe.

QED

Beispiel. Wir zeigen $\neg\Box A \leftrightarrow \Diamond\neg A$:

1. $\neg\Box A \leftrightarrow \neg\Box A$ Axiom
2. $A \leftrightarrow \neg\neg A$ Axiom
3. $\neg\Box A \leftrightarrow \neg\Box\neg\neg A$ Ersetzungstheorem auf 1 und 2
4. $\neg\Box A \leftrightarrow \Diamond\neg A$ Definition von \Diamond auf 3

4.5.2 Hilberttypkalküle für Standardmodallogiken

Hilberttypkalküle für andere Standardmodallogiken lassen sich einfach durch Hinzunahme weiterer Axiomenschemata angeben. Wir verwenden die folgenden Axiomenschemata, und notieren hier auch die korrespondierenden Rahmeneigenschaften:

Name	Axiomenschema	Rahmeneigenschaft
D	$\Box A \rightarrow \Diamond A$	seriell
T	$\Box A \rightarrow A$	reflexiv
B	$A \rightarrow \Box\Diamond A$	symmetrisch
4	$\Box A \rightarrow \Box\Box A$	transitiv
5	$\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$	euklidisch

Ausgehend von K erhält man Hilberttypkalküle für die übrigen Standardmodallogiken wie folgt:

Logik	zusätzliche Axiomenschemata
D	D
T	T
B	T, B
$K4$	4
$S4$	$T, 4$
$S5$	$T, 5$ oder $T, B, 4$

Definition 4.19 Alle Erweiterungen von K (einschließlich K) bezeichnet man als *normale Modallogiken*.

normale Modallogiken

Bemerkung. Ein Beispiel für eine *nicht-normale* Modallogik erhält man ausgehend vom Kalkül für K dadurch, dass man in ihm das Axiomenschema K weglässt und die Regularitätsregel hinzufügt. (Nicht-normale Modallogiken werden z. B. in Girle (2009), Hughes & Cresswell (1996) und Priest (2008) behandelt.)

Durch die jeweiligen Kalküle für die Logiken S werden Ableitbarkeitsrelationen \vdash_S induziert.

Definition 4.20 Für die *Ableitbarkeit* von A aus Annahmen Γ in einem Hilberttypkalkül für S legen wir fest: *Ableitbarkeit*

$$\Gamma \vdash_S A \iff \vdash_S \wp \Gamma \rightarrow A$$

für endliche $\Gamma' \subseteq \Gamma$, wobei $\wp \Gamma' := (B_1 \wedge \dots \wedge B_n)$ für $B_i \in \Gamma'$.

Für diese Ableitbarkeitsrelationen \vdash_S kann man zeigen, dass sie mit den jeweiligen Folgerungsrelationen \vDash_S übereinstimmen, d. h. dass die Spezifizierung einer Modallogik durch den jeweiligen Kalkül mit deren semantischer Spezifizierung übereinstimmt. Mit anderen Worten, man kann zeigen, dass Korrektheit und Vollständigkeit gilt: $\Gamma \vdash_S A \iff \Gamma \vDash_S A$.

Für Weiteres zur Verwendung von Annahmen in Hilberttypkalkülen siehe [Anhang A](#).

4.6 Modallogische Tableauekalküle

Neben Hilberttypkalkülen werden auch sogenannte Tableauekalküle verwendet. Dabei handelt es sich um reine Regelkalküle, die keinerlei Axiome verwenden. In Ableitungen in Hilberttypkalkülen werden ausgehend von Axiomen unter Verwendung weniger Regeln Formeln “aufgebaut”. Hilberttypkalküle werden deshalb auch als *synthetische* Kalküle bezeichnet. Die in Ableitungen erzeugten (“synthetisierten”) Formeln sind die im jeweiligen Kalkül bewiesenen Formeln. Im Unterschied dazu sind Tableauekalküle *analytische* Kalküle, in denen Formeln nach bestimmten Regeln “zerlegt” werden können. Dabei kommt ein Widerlegungsverfahren zum Einsatz: Die zu beweisende Ausgangsformel wird zunächst negiert. Aus der negierten Formel werden dann durch Regelanwendungen Formeln in einer Baumstruktur, dem sogenannten Tableau, abgeleitet. Diese abgeleiteten Formeln stellen Bedingungen für die negierte Formel dar; die negierte Formel wird in diesem Sinne analysiert. Widersprechen sich diese Bedingungen, so ist die negierte Formel widerlegt, woraus man schließt, dass die nicht-negierte Ausgangsformel bewiesen ist. Falls keine Widerlegung der negierten Formel erreicht werden kann, lässt sich aus dem Tableau ein Gegenmodell für die nicht-negierte Ausgangsformel konstruieren.

Wir behandeln zunächst aussagenlogische analytische Tableaux, und erweitern diese dann durch Hinzunahme weiterer Regeln zu modallogischen Tableaux. Dabei verwenden wir eine vereinfachte Objektsprache ohne Verum \top und Falsum \perp .

4.6.1 Aussagenlogische analytische Tableaux

Literatur (nur für klassische Logik)

- P. Schroeder-Heister (2008), *Einführung in die Logik*, Vorlesungsskript, Universität Tübingen. <http://www.uni-tuebingen.de/en/30440>.

- R. M. Smullyan (1995), *First-Order Logic*. New York: Dover Publications.
- R. M. Smullyan (2009), *Logical Labyrinths*. Wellesley, MA: A K Peters.

Definition 4.21 Eine *Signatur* σ ist eine endliche punktseparierte Liste positiver ganzer Zahlen. *Signatur*

Eine *signierte Formel* ist ein Ausdruck der Form σA , wobei σ eine Signatur und A eine Formel ist. *signierte Formel*

- Bemerkungen.** (i) Die Signatur σ kann als Index über Welten gelesen werden. Den Ausdruck σA liest man als “ A gilt in σ ” bzw. “in σ gilt A ”.
- (ii) Eine Signatur $\sigma.n$ ist eine Signatur σ gefolgt von einem Punkt und einer positiven ganzen Zahl n . Eine Signatur $\sigma.n$ steht für “ σ sieht $\sigma.n$ ”.
- (iii) Beispiel für eine Signatur: 1.2.1.4 (“1.2.1 (= σ) sieht 1.2.1.4 (= $\sigma.4$)”).
- (iv) In Tableaux für die klassische Logik sind Signaturen σ zwar überflüssig, sie werden aber für die Erweiterung zu modallogischen Tableaux benötigt.

Definition 4.22 (i) Ein *aussagenlogisches (analytisches) Tableau* ist eine Baumstruktur von signierten Formeln, die nach folgenden Regeln erzeugt wird: *aussagenlogisches Tableau*

$$\alpha\text{-Regeln} \left\{ \begin{array}{l} (\wedge) \frac{\sigma A \wedge B}{\sigma A} \\ \sigma B \end{array} \quad (\neg\vee) \frac{\sigma \neg(A \vee B)}{\sigma \neg A} \\ \sigma \neg B \quad (\neg\rightarrow) \frac{\sigma \neg(A \rightarrow B)}{\sigma A} \\ \sigma \neg B \right.$$

$$\beta\text{-Regeln} \left\{ (\neg\wedge) \frac{\sigma \neg(A \wedge B)}{\sigma \neg A \mid \sigma \neg B} \quad (\vee) \frac{\sigma A \vee B}{\sigma A \mid \sigma B} \quad (\rightarrow) \frac{\sigma A \rightarrow B}{\sigma \neg A \mid \sigma B} \right.$$

α -Regeln bezeichnet man auch als *konjunktive Regeln*, β -Regeln als *disjunktive Regeln*.

Durch α -Regeln wird ein Zweig in der Baumstruktur um die beiden unter dem Regelstrich stehenden Formeln erweitert. Durch β -Regeln ergibt sich eine Verzweigung in einen linken Zweig, der mit der unter dem Regelstrich links stehenden Formel beginnt, und in einen rechten Zweig, der mit der unter dem Regelstrich rechts stehenden Formel beginnt.

Zusätzlich verwenden wir die Regel (\neg) $\frac{\sigma \neg\neg A}{\sigma A}$, durch die ein Zweig um die unter dem Regelstrich stehende Formel erweitert wird.

- (ii) Ein *Tableau für A* ist ein Tableau, das mit der signierten Formel $1 \neg A$ beginnt. *Tableau für A*
- (iii) Ein Zweig eines Tableaus heißt *geschlossen*, wenn er sowohl σB als auch $\sigma \neg B$ enthält, für eine beliebige Formel B .
- (iv) Ein Tableau heißt *geschlossen*, wenn alle seine Zweige geschlossen sind.
- (v) Ein Zweig eines Tableaus heißt *offen*, wenn der Zweig nicht geschlossen ist.
- (vi) Ein Tableau heißt *offen*, wenn es einen offenen Zweig enthält.

Bemerkung. Die Regel (\neg) für die Negation zählen wir zu den α -Regeln. Alternativ könnte man eine β -Regel der Form $\frac{\sigma \neg\neg A}{\sigma A \mid \sigma A}$ verwenden. Dies würde jedoch zu unnötigen Verzweigungen führen.

Definition 4.23 Ein geschlossenes Tableau für die signierte Formel $1 \neg A$ ist ein *Tableaubeweis* für die nicht-negierte Ausgangsformel A .

- Bemerkungen.** (i) Die signierten Formeln sind die Knoten in der Tableau-Baumstruktur. Die Kanten zeichnen wir nicht ein; stattdessen machen wir die Zweige durch senkrechte Striche kenntlich.
- (ii) Zusätzlich verwenden wir Zeilennummern (ganz links) und Kommentare der Form “(Regelname, Zeilennummer)” (jeweils rechts neben der Formel), die aber nicht zum eigentlichen Tableau gehören. Geschlossene Zweige markieren wir durch $n \times m$, wobei n und m die Zeilennummern jener beiden Zeilen sind, in denen σA und $\sigma \neg A$ vorkommen.
- (iii) Zur Abkürzung dürfen Formeln $\neg\neg A$ in Tableaux auch gleich als A geschrieben werden, d. h. ohne die Regel (\neg) explizit anzuwenden.

Beispiel. Tableaubeweis für $(A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$:

1.		$1 \neg((A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)))$	
2.		$1 A \wedge B \rightarrow C$	($\neg \rightarrow$, 1)
3.		$1 \neg(A \rightarrow (B \rightarrow C))$	($\neg \rightarrow$, 1)
4.		$1 \neg(A \wedge B)$	(\rightarrow , 2)
5.	$1 \neg A$	$1 \neg B$	($\neg \wedge$, 4)
6.	$1 A$	$1 A$	($\neg \rightarrow$, 3)
7.	$1 \neg(B \rightarrow C)$	$1 \neg(B \rightarrow C)$	($\neg \rightarrow$, 3)
8.	5×6	$1 B$	($\neg \rightarrow$, 7)
9.		$1 \neg C$	($\neg \rightarrow$, 7)
		5×8	4×8

Die Reihenfolge der Regelnanwendungen ist irrelevant. Auch das folgende Tableau ist ein Tableaubeweis für $(A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$:

1.		$1 \neg((A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)))$	
2.		$1 A \wedge B \rightarrow C$	($\neg \rightarrow$, 1)
3.		$1 \neg(A \rightarrow (B \rightarrow C))$	($\neg \rightarrow$, 1)
4.		$1 A$	($\neg \rightarrow$, 3)
5.		$1 \neg(B \rightarrow C)$	($\neg \rightarrow$, 3)
6.		$1 B$	($\neg \rightarrow$, 5)
7.		$1 \neg C$	($\neg \rightarrow$, 5)
8.		$1 \neg(A \wedge B)$	(\rightarrow , 2)
9.	$1 \neg A$	$1 \neg B$	($\neg \wedge$, 8)
	4×9	6×9	7×8

4.6.2 Modallogische Tableaux für K

Literatur

- M. D’Agostino, D. M. Gabbay, R. Hähnle & J. Posegga (Hrsg.) (1999), *Handbook of Tableau Methods*. Dordrecht: Kluwer.
- M. Fitting & R. L. Mendelsohn (1998), *First-Order Modal Logic*. Dordrecht: Kluwer.

Definition 4.24 Ein *modallogisches Tableau für K* ist ein aussagenlogisches Tableau, in dem zusätzlich die folgenden Regeln verwendet werden dürfen:

modallogisches Tableau für K

(i) Falls die Signatur $\sigma.n$ noch nicht im Zweig vorkommt:

$$\mu\text{-Regeln} \left\{ \begin{array}{l} (\diamond) \frac{\sigma \diamond A}{\sigma.n A} \\ (\neg\square) \frac{\sigma \neg\square A}{\sigma.n \neg A} \end{array} \right.$$

(ii) Falls die Signatur $\sigma.n$ schon im Zweig vorkommt:

$$\nu\text{-Regeln} \left\{ \begin{array}{l} (\square) \frac{\sigma \square A}{\sigma.n A} \\ (\neg\diamond) \frac{\sigma \neg\diamond A}{\sigma.n \neg A} \end{array} \right.$$

Bemerkungen. (i) Die μ -Regeln (\diamond) und $(\neg\square)$ dürfen nur für neue Signaturen $\sigma.n$ angewendet werden. Semantisch lässt sich das wie folgt motivieren: Angenommen wir haben in einem Zweig $\sigma \diamond A$. Dies bedeutet, dass $\diamond A$ in der Welt σ gilt. Die Bedingung dafür ist, dass in einer von σ aus erreichbaren Welt A gilt. Eine solche Welt hat einen Namen der Form $\sigma.n$. Falls $\sigma.n$ im Zweig schon verwendet wurde, ist jedoch nicht sichergestellt, dass in der Welt $\sigma.n$ auch das Gewünschte (hier: A) gilt. Denn durch die vorherige Verwendung des Namens $\sigma.n$ wurde schon etwas für die benannte Welt festgelegt, nämlich was in ihr gilt. Deshalb muss man eine neue Signatur wählen, die dann einfach eine Welt bezeichnet, in der A gilt. Entsprechendes gilt für $(\neg\square)$.

(ii) Die ν -Regeln (\square) und $(\neg\diamond)$ dürfen nur für Signaturen $\sigma.n$ angewendet werden, die schon im Zweig vorkommen. Im Fall von (\square) ist die Prämisse $\sigma \square A$. Das heißt, in der durch σ benannten Welt gilt $\square A$. Semantisch heißt das, dass die Implikation “wenn σ die Welt $\sigma.n$ sieht, dann gilt A in $\sigma.n$ ” für jede Welt $\sigma.n$ gelten muss. Die Beschränkung auf eine schon im Zweig vorkommende Signatur $\sigma.n$ entspricht dem Antezedens dieser Implikation. In der Konklusion $\sigma.n A$ von (\square) muss deshalb eine solche schon im Zweig vorkommende Signatur $\sigma.n$ verwendet werden. Entsprechend für $(\neg\diamond)$.

(iii) Quantorenlogisch gilt $\forall x A(x) \rightarrow \exists x A(x)$. Wegen der bei den ν -Regeln gemachten Beschränkung auf schon im Zweig vorkommende Signaturen $\sigma.n$ kann es jedoch keinen Tableaubeweis für $\square A \rightarrow \diamond A$ geben.

Die Bemerkungen (i) und (ii) sollen lediglich der semantischen Motivation der Regeln dienen, und dazu, plausibel zu machen, weshalb aus offenen Tableaux Gegenmodelle konstruiert werden können. Der (rein syntaktische) Begriff des Tableaubeweises ist unabhängig von semantischen Erläuterungen gegeben.

Beispiel. Die Formel $\square(A \wedge B) \rightarrow (\square A \wedge \square B)$ hat den folgenden Tableaubeweis:

1.		1	$\neg(\square(A \wedge B) \rightarrow (\square A \wedge \square B))$		
2.		1	$\square(A \wedge B)$		$(\neg\rightarrow, 1)$
3.		1	$\neg(\square A \wedge \square B)$		$(\neg\rightarrow, 1)$
4.	1	$\neg\square A$	$(\neg\wedge, 3)$	1	$\neg\square B$ $(\neg\wedge, 3)$
5.	1.1	$\neg A$	$(\neg\square, 4)$	1.1	$\neg B$ $(\neg\square, 4)$
6.	1.1	$A \wedge B$	$(\square, 2)$	1.1	$A \wedge B$ $(\square, 2)$
7.	1.1	A	$(\wedge, 6)$	1.1	A $(\wedge, 6)$
8.	1.1	B	$(\wedge, 6)$	1.1	B $(\wedge, 6)$
		$\overline{5 \times 7}$		$\overline{5 \times 8}$	

Falls ein Tableau für A einen Zweig enthält, der nicht geschlossen werden kann, so kann aus diesem offenen Zweig ein Gegenmodell für A abgelesen werden.

Beispiele. (i) Ein Tableau für $p \vee q \rightarrow p \wedge q$ ist

1.		$1 \neg(p \vee q \rightarrow p \wedge q)$	
2.		$1 p \vee q$	$(\neg \rightarrow, 1)$
3.		$1 \neg(p \wedge q)$	$(\neg \rightarrow, 1)$
4.		$1 p$	$(\vee, 2)$
5.	$\frac{1 \neg p}{4 \times 5} \quad (\neg \wedge, 3)$	$1 \neg q$	$(\neg \wedge, 3)$
		$1 \neg p$	$(\neg \wedge, 3)$
			$1 q$
			$\frac{1 \neg q}{4 \times 5} \quad (\neg \wedge, 3)$

Dieses Tableau ist offen, und kann auch durch wiederholte Regelnwendungen nicht geschlossen werden. Die nicht-negierte Ausgangsformel $p \vee q \rightarrow p \wedge q$ ist nicht beweisbar.

Ein offener Zweig liefert ein Gegenmodell: Gilt p in 1 und $\neg q$ in 1 (zweiter Zweig), so gilt $\neg(p \vee q \rightarrow p \wedge q)$ in 1. Die nicht-negierte Ausgangsformel $p \vee q \rightarrow p \wedge q$ kann also nicht gelten. Das Gegenmodell ist durch $W = \{1\}$, $R = \emptyset$ und $h(p, 1) = w$ und $h(q, 1) = f$ (Bewertungen aller anderen Aussagesymbole beliebig) gegeben.

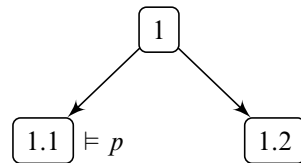
Aus dem dritten Zweig ergibt sich ein weiteres Gegenmodell mit $h(q, 1) = w$ und $h(p, 1) = f$.

(ii) Das Tableau

1.	$1 \neg(\diamond p \rightarrow \Box p)$	
2.	$1 \diamond p$	$(\neg \rightarrow, 1)$
3.	$1 \neg \Box p$	$(\neg \rightarrow, 1)$
4.	1.1 p	$(\diamond, 2)$
5.	1.2 $\neg p$	$(\neg \Box, 3)$

ist offen, und erneute Regelnwendungen auf schon behandelte Formeln können nicht zu einem geschlossenen Tableau führen.

Aus dem offenen Zweig kann man das Gegenmodell $\mathfrak{M} = \langle W, R, h \rangle$



mit $W = \{1, 1.1, 1.2\}$, $R = \{(1, 1.1), \langle 1, 1.2 \rangle\}$ und $h(p, 1.1) = w$, $h(p, 1.2) = f$ (restliche Aussagesymbole überall f) ablesen.

(iii) Das Tableau

1.	$1 \neg(\Box p \rightarrow \diamond p)$	
2.	$1 \Box p$	$(\neg \rightarrow, 1)$
3.	$1 \neg \diamond p$	$(\neg \rightarrow, 1)$

ist ebenfalls offen, und kann nicht geschlossen werden. Sowohl $(\Box, 2)$ als auch $(\neg \diamond, 3)$ würde eine Signatur der Form $1.n$ erfordern, die schon im Zweig vorkommen müsste. Es kommt jedoch nur die Signatur 1 vor. Das Gegenmodell ist $\mathfrak{M} = \langle W, R, h \rangle$, wobei $W = \{1\}$, $R = \emptyset$ und $h(A, 1) = f$ für alle $A \in AS$.

Bemerkung. Könnte man bei Anwendung von (\Box) und $(\neg\Diamond)$ auch Signaturen einführen, die noch nicht im Zweig vorkommen, dann könnte man das folgende geschlossene Tableau erzeugen:

1. $1 \neg(\Box p \rightarrow \Diamond p)$
2. $1 \Box p$ ($\neg\rightarrow$, 1)
3. $1 \neg\Diamond p$ ($\neg\rightarrow$, 1)
4. $1.1 p$ (modifizierte Regel \Box , 3)
5. $\frac{1.1 \neg p}{4 \times 5}$ (modifizierte Regel $\neg\Diamond$, 4)

Einen Tableaubeweis für $\Box p \rightarrow \Diamond p$ erhält man auch, wenn als zusätzliche Regeln (T)

$$\frac{\sigma \Box A}{\sigma A} \quad \text{und} \quad \frac{\sigma \neg\Diamond A}{\sigma \neg A}$$

verwendet werden dürfen:

1. $1 \neg(\Box p \rightarrow \Diamond p)$
2. $1 \Box p$ ($\neg\rightarrow$, 1)
3. $1 \neg\Diamond p$ ($\neg\rightarrow$, 1)
4. $1 p$ (T , 3)
5. $\frac{1 \neg p}{4 \times 5}$ (T , 4)

Theorem 4.25 (Korrektheit und Vollständigkeit) *Es gibt einen K-Tableaubeweis für A genau dann, wenn A K-gültig ist.*

Beweis. Siehe [Fitting & Mendelsohn \(1998, § 2.5\)](#) oder [Piecha \(2014, § 3.7.4\)](#). QED

4.6.3 Tableukalküle für Standardmodallogiken

Tableukalküle für andere Standardmodallogiken können durch Hinzunahme weiterer Regelpaare definiert werden. Wir verwenden die folgenden Regeln,

wobei die Signaturen σ und $\sigma.n$ schon im Zweig vorkommen müssen:

Regelname	Regelpaar	
D	$\frac{\sigma \Box A}{\sigma \Diamond A}$	$\frac{\sigma \neg\Diamond A}{\sigma \neg\Box A}$
T	$\frac{\sigma \Box A}{\sigma A}$	$\frac{\sigma \neg\Diamond A}{\sigma \neg A}$
B	$\frac{\sigma.n \Box A}{\sigma A}$	$\frac{\sigma.n \neg\Diamond A}{\sigma \neg A}$
4	$\frac{\sigma \Box A}{\sigma.n \Box A}$	$\frac{\sigma \neg\Diamond A}{\sigma.n \neg\Diamond A}$
$4r$	$\frac{\sigma.n \Box A}{\sigma \Box A}$	$\frac{\sigma.n \neg\Diamond A}{\sigma \neg\Diamond A}$

Ausgehend vom Tableaurekalkül für K, erhält man die folgenden Tableaurekalküle:

Tableaurekalkül für	zusätzliche Regelpaare
D	D
T	T
B	T, B
K4	4
S4	$T, 4$
S5	$T, 4, 4r$

(Es sei erneut darauf hingewiesen, dass die Regeln nur für schon im Zweig vorkommende Signaturen σ und $\sigma.n$ angewendet werden können.)

Bemerkung. Bei einem Tableaurekalkül für S (wobei $S = K, D, T$ usw.) sprechen wir auch von S -Tableaux und S -Tableaubeweisen, sowie bei aus offenen S -Tableaux konstruierten Gegenmodellen von S -Gegenmodellen. Tableaurekalkül für S

Beispiele. (i) Ein B-Tableaubeweis für $A \rightarrow \Box \Diamond A$ ist

1. $1 \neg(A \rightarrow \Box \Diamond A)$
2. $1 A$ ($\neg \rightarrow, 1$)
3. $1 \neg \Box \Diamond A$ ($\neg \rightarrow, 1$)
4. $1.1 \neg \Diamond A$ ($\neg \Box, 3$)
5. $\frac{1 \neg A}{2 \times 5}$ ($B, 4$)

(ii) Ein K4-Tableaubeweis für $\Box A \rightarrow \Box \Box A$ ist

1. $1 \neg(\Box A \rightarrow \Box \Box A)$
2. $1 \Box A$ ($\neg \rightarrow, 1$)
3. $1 \neg \Box \Box A$ ($\neg \rightarrow, 1$)
4. $1.1 \neg \Box A$ ($\neg \Box, 3$)
5. $1.1.1 \neg A$ ($\neg \Box, 4$)
6. $\frac{1.1 \Box A}{4 \times 6}$ ($4, 2$)

Korrektheit und Vollständigkeit gilt auch für die Tableaurekalküle für D, T, B usw.

4.6.4 Tableaux mit Annahmen

Wir haben bisher nur Tableaux ohne Annahmen betrachtet. Man kann diese aber entsprechend erweitern, und dann zeigen: Es gibt einen Tableaubeweis für A aus Annahmen A_1, \dots, A_n genau dann, wenn $A_1, \dots, A_n \models A$.

Im rein aussagenlogischen Fall ist ein Tableau für A aus Annahmen A_1, \dots, A_n ein Tableau, das mit

1. $1 A_1$
- \vdots
- \vdots
- $n.$ $1 A_n$
- $n + 1.$ $1 \neg A$

beginnt. (Man vergleiche dies mit einem Tableau für $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow A$.)

Im modallogischen Fall kann analog zur Unterscheidung zwischen lokaler und globaler logischer Folgerung auch bei Tableaux zwischen lokaler und globaler Verwendung von Annahmen unterschieden werden.

- Definition 4.26**
- (i) Die *lokale Verwendung einer Annahme* A besteht in der Erweiterung eines offenen Zweigs um die signierte Formel $1 A$. *lokale Annahme*
 - (ii) Die *globale Verwendung einer Annahme* A besteht in der Erweiterung eines offenen Zweigs um die signierte Formel σA , wobei σ schon in diesem Zweig vorkommen muss. *globale Annahme*
 - (iii) Einen Tableaubeweis für A aus Annahmen A_1, \dots, A_n bezeichnen wir als (*Tableau-*) *Ableitung* von A aus A_1, \dots, A_n . *Tableaubeweis*
 - (iv) Werden in einem geschlossenen Tableau für A alle Annahmen A_1, \dots, A_n lokal verwendet, so schreiben wir $A_1, \dots, A_n \vdash^l A$; falls alle Annahmen global verwendet werden, schreiben wir $A_1, \dots, A_n \vdash^g A$. *Tableaubeweis*

Beispiel. Wir zeigen $\Box A \rightarrow A \vdash^g \Box \Box A \rightarrow \Box A$:

1.	$1 \neg(\Box \Box A \rightarrow \Box A)$	
2.	$1 \Box \Box A$	$(\neg \rightarrow, 1)$
3.	$1 \neg \Box A$	$(\neg \rightarrow, 1)$
4.	$1.1 \neg A$	$(\neg \Box, 3)$
5.	$1.1 \Box A$	$(\Box, 2)$
6.	$1.1 \Box A \rightarrow A$	(globale Annahme)
7.	$\frac{1.1 \neg \Box A}{5 \times 7} \quad (\rightarrow, 6)$	$\frac{1.1 A}{4 \times 7} \quad (\rightarrow, 6)$

Bemerkung. Es gilt jeweils Korrektheit und Vollständigkeit:

$$A_1, \dots, A_n \vdash^l A \iff A_1, \dots, A_n \vDash^l A$$

$$A_1, \dots, A_n \vdash^g A \iff A_1, \dots, A_n \vDash^g A$$

(Entsprechend auch für die anderen Standardmodallogiken.)

Man kann auch Tableaux betrachten, in denen sowohl lokale als auch globale Annahmen verwendet werden dürfen. Zum Beispiel kann $\Box A$ in K abgeleitet werden, wenn zur globalen Annahme $\Box A \rightarrow A$ noch die lokale Annahme $\Box \Box A$ hinzugenommen wird:

1.	$1 \neg \Box A$	
2.	$1.1 \neg A$	$(\neg \Box, 1)$
3.	$1 \Box \Box A$	(lokale Annahme)
4.	$1.1 \Box A$	$(\Box, 3)$
5.	$1.1 \Box A \rightarrow A$	(globale Annahme)
6.	$\frac{1.1 \neg \Box A}{4 \times 6} \quad (\rightarrow, 5)$	$\frac{1.1 A}{2 \times 6} \quad (\rightarrow, 5)$

Die Verwendung globaler Annahmen in Tableaux wird im Weiteren keine Rolle spielen. Auch gilt unser Hauptinteresse nach wie vor dem *lokalen* logischen Folgerungsbegriff.

5 Modale Quantorenlogik

Wir geben zunächst Syntax und Semantik der klassischen (nicht-modalen) Quantorenlogik an, und führen quantorenlogische Tableaux ein. Die modale Quantorenlogik kann dann als Erweiterung angegeben werden. Dabei kann zwischen konstanten und variierenden Gegenstandsbereichen unterschieden werden. Im ersten Fall wird für alle Welten derselbe Gegenstandsbereich verwendet; im zweiten Fall darf der Gegenstandsbereich von Welt zu Welt variieren. Wir veranschaulichen die beiden Fälle zunächst anhand modallogischer Tableaux. Danach behandeln wir die jeweiligen modallogischen Semantiken, und gehen schließlich auf die Barcanschen Formeln ein, die für den Vergleich der beiden Fälle eine wichtige Rolle spielen.

Literatur

- M. Fitting & R. L. Mendelsohn (1998), *First-Order Modal Logic*. Dordrecht: Kluwer.
- R. M. Smullyan (1995), *First-Order Logic*. New York: Dover Publications. (Nur für klassische Quantorenlogik.)

5.1 Syntax der klassischen Quantorenlogik

Definition 5.1 Wir erweitern das *Alphabet* um folgende Zeichen:

Alphabet

- (i) *Quantoren*: \forall (Allquantor, “Für alle”) und \exists (Existenzquantor, “Es gibt”).
- (ii) *Terme*:
 - *Variablen*: x, y, z, x_1, x_2, \dots
 - *Individuenkonstanten* (kurz: *Konstanten*): $k, k', k_1, k_2, \dots, l, \dots$
- (iii) *Relationszeichen* (bzw. *Prädikatsymbole*): P, Q, R, \dots (Gegebenenfalls mit fester Stelligkeit. 0-stellige Relationszeichen entsprechen Aussagesymbolen.)
- (iv) Komma: $,$

Definition 5.2 Wir erweitern die Definition von *Formeln* wie folgt:

Formel

- (i) Ist R ein n -stelliges Relationszeichen und sind t_1, \dots, t_n Terme, dann ist $R(t_1, \dots, t_n)$ eine Formel, die wir *atomare Formel* bzw. *Atom* nennen. (Abkürzend kann man auch $Rt_1 \dots t_n$ schreiben, für konkrete Terme $t_1 \dots t_n$.)
- (ii) Ist A eine Formel und ist x eine Variable, dann sind $\forall x A$ und $\exists x A$ ebenfalls Formeln.

Bemerkungen. (i) Die Quantoren binden stärker als die übrigen logischen Konstanten. Klammerersparnis entsprechend.

Bindungsstärke

(ii) Das *Vorkommen* eines Zeichens sei nur anhand eines Beispiels erläutert: In der Formel $\forall x P(x) \wedge Q(x, y)$ kommt x dreimal und y einmal vor.

Vorkommen

(iii) Die Variablen könnte man auch zu den logischen Zeichen zählen, was jedoch keinen wesentlichen Unterschied macht.

(iv) Wir verzichten auf die logischen Konstanten Verum \top und Falsum \perp .

Definition 5.3 Wir definieren *freie* bzw. *gebundene* Variablenvorkommen:

frei/gebunden

- (i) Jedes Variablenvorkommen in einer atomaren Formel ist frei.

(ii) Die freien bzw. gebundenen Variablenvorkommen in A und B sind auch freie bzw. gebundene Variablenvorkommen in $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ und $(A \rightarrow B)$. (Ebenso für $\Box A$ und $\Diamond A$.)

(iii) Jedes freie Vorkommen von x in A ist ein gebundenes Vorkommen von x in $\forall x A$ und $\exists x A$.

Alle anderen freien bzw. gebundenen Variablenvorkommen in A sind auch freie bzw. gebundene Variablenvorkommen in $\forall x A$ und $\exists x A$.

Die freien Vorkommen von x in A liegen im *Wirkungsbereich* des \forall - bzw. \exists -Quantors in $\forall x A$ bzw. $\exists x A$.

Eine Formel ohne freie Variablenvorkommen heißt auch *geschlossen*, andernfalls *offen*.

Bemerkung. Wir schreiben z. B. $A(x)$, um auszudrücken, dass x in A frei vorkommen kann. (A steht hier für eine beliebige Formel; d. h. $A(x)$ steht i. A. nicht etwa für ein Atom wie z. B. $P(x)$.)

Beispiele. Für die Variablenvorkommen gilt:

(i) $\exists z(Q(z, k) \rightarrow \neg R(x, y, y))$ – x, y sind frei; z ist gebunden.

(In $\exists z$ ist z weder frei noch gebunden.)

(ii) $P(x) \wedge \forall x P(x)$ – das erste Vorkommen von x ist frei, das dritte gebunden; das zweite ist weder frei noch gebunden.

5.2 Semantik der klassischen Quantorenlogik

Im Folgenden verwenden wir den Begriff *Modell* wieder allgemein (d. h. im Sinne des z. B. in der *Einführung in die Logik* (Piecha, 2015) verwendeten Strukturbegriffs); eine Formel A kann also in einem Modell gelten oder auch nicht. Im letzten Fall bezeichnen wir das Modell auch als Gegenmodell für A . Wir betrachten dabei Sprachen \mathcal{L} , in denen nur bestimmte Konstanten und Relationszeichen vorkommen.

Definition 5.4 Ein *Modell* für eine Sprache \mathcal{L} ist ein geordnetes Paar $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$, wobei M eine nichtleere Menge ist und \mathcal{I} eine Funktion, die jedem Symbol aus \mathcal{L} eine *Interpretation* zuordnet wie folgt:

Modell

Interpretation

(i) $\mathcal{I}(k) \in M$ für Konstanten $k \in \mathcal{L}$,

(ii) $\mathcal{I}(R) \subseteq M^n$, falls $R \in \mathcal{L}$ ein n -stelliges Relationszeichen ist ($n \geq 1$),

(iii) $\mathcal{I}(R) \in \{w, f\}$, falls $R \in \mathcal{L}$ ein 0-stelliges Relationszeichen, d. h. ein Aussagesymbol ist, und $w := \emptyset$, $f := M$.

Die Menge M heißt *Gegenstandsbereich* (oder auch *Individuenbereich*, *Universum*).

Beispiel. \mathcal{L} enthalte lediglich die Konstanten k', k_1, k_2, \dots und ein 2-stelliges Relationszeichen Q .

(i) Der Gegenstandsbereich M sei $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$,

(ii) die Interpretation der Konstanten sei durch $\mathcal{I}(k') = 5$ und $\mathcal{I}(k_n) = n$ gegeben (d. h. \mathcal{I} ordnet der Individuenkonstante (d. h. dem *Term*) $k' \in \mathcal{L}$ als *Gegenstand* die Zahl $5 \in \mathbb{N}$ zu; den Individuenkonstanten (d. h. den *Termen*) $k_n \in \mathcal{L}$ ordnet \mathcal{I} als *Gegenstände* die Zahlen $n \in \mathbb{N}$ zu, z. B. $\mathcal{I}(k_7) = 7$),

- (iii) und die Interpretation von Q sei $\mathcal{I}(Q) = \{\langle n, n' \rangle \mid n < n'\} \subseteq \mathbb{N}^2$ (d. h. das 2-stellige Relationszeichen wird durch \mathcal{I} als die 2-stellige kleiner-als-Relation auf \mathbb{N}^2 interpretiert; dann ist z. B. $\langle 5, 3 \rangle \notin \mathcal{I}(Q)$, da $5 \not< 3$).

Dann ist $\mathfrak{M} = \langle \mathbb{N}, \mathcal{I} \rangle$ ein Modell für die Sprache \mathcal{L} .

Durch ein Modell $\langle M, \mathcal{I} \rangle$ für eine Sprache \mathcal{L} werden den *Konstanten* in \mathcal{L} also *Gegenstände* in M zugeordnet. Um beliebige Terme, also auch Variablen, behandeln zu können, benötigen wir zusätzlich Variablenbelegungen.

Definition 5.5 (i) Sei $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ ein Modell. Eine *Variablenbelegung* in \mathfrak{M} ist eine Funktion v , die jeder Variable x einen Wert $v(x) \in M$ zuordnet. (Also $v : \text{VAR} \rightarrow M$, wobei VAR die Menge aller Variablen sei.) *Variablenbelegung*

- (ii) Unterscheidet sich eine Variablenbelegung v' höchstens durch die Zuordnung $v'(x) = m \in M$ von einer Variablenbelegung v , so schreiben wir $v[x \mapsto m]$ für v' . Es gilt

$$v[x \mapsto m](y) = \begin{cases} m & \text{falls } x = y, \\ v(y) & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

Die Variablenbelegung $v[x \mapsto m]$ heißt *Variante* (bzw. x -Variante) von v .

Variante

Beispiele. Wir erweitern die Sprache \mathcal{L} aus dem vorherigen Beispiel um die Variablen x, y, z, z_1 , und behalten das dort angegebene Modell $\mathfrak{M} = \langle \mathbb{N}, \mathcal{I} \rangle$ bei.

- (i) Dann ist durch

$$v(x) = 4, \quad v(y) = 7, \quad v(z) = 0, \quad v(z_1) = 7$$

eine Variablenbelegung v in \mathfrak{M} gegeben.

- (ii) Die durch die Zuordnungen

$$v'(x) = 4, \quad v'(y) = 11, \quad v'(z) = 0, \quad v'(z_1) = 7$$

gegebene Variablenbelegung v' ist eine y -Variante von v , da $v' = v[y \mapsto 11]$.

- (iii) Des Weiteren ist z. B. $v[z \mapsto 0]$, also die Variablenbelegung v selbst, eine (triviale) z -Variante von v .

Durch Interpretation \mathcal{I} und Variablenbelegung v können nun allen Termen Gegenstände des Individuenbereichs zugeordnet werden. Durch Kombination von Interpretation und Variablenbelegung erhält man eine Termbelegung.

Definition 5.6 Sei $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ ein Modell für \mathcal{L} , v eine Variablenbelegung in \mathfrak{M} und TERM die Menge aller Terme.

Dann ist die *Termbelegung* als Funktion $\llbracket \cdot \rrbracket_v^{\mathfrak{M}} : \text{TERM} \rightarrow M$ definiert durch:

Termbelegung

$$\begin{aligned} \llbracket x \rrbracket_v^{\mathfrak{M}} &:= v(x) \quad \text{für Variablen } x, \\ \llbracket k \rrbracket_v^{\mathfrak{M}} &:= \mathcal{I}(k) \quad \text{für Konstanten } k. \end{aligned}$$

Beispiel. Für unser Modell $\mathfrak{M} = \langle \mathbb{N}, \mathcal{I} \rangle$ und die Variablenbelegung v' erhalten wir beispielsweise die Termbelegungen $\llbracket k_{11} \rrbracket_{v'}^{\mathfrak{M}} = \llbracket y \rrbracket_{v'}^{\mathfrak{M}} = 11$. Für die Variablenbelegung v ist $\llbracket y \rrbracket_v^{\mathfrak{M}} = \llbracket z_1 \rrbracket_v^{\mathfrak{M}} = \llbracket k_7 \rrbracket_v^{\mathfrak{M}} = 7$.

Definition 5.7 Sei \mathfrak{M} ein Modell $\langle M, \mathcal{I} \rangle$, v eine Variablenbelegung und $\llbracket \cdot \rrbracket_v^{\mathfrak{M}}$ eine Termbelegung. Wir definieren die Relation $\mathfrak{M} \models_v A$ (“ A gilt im Modell \mathfrak{M} unter der Variablenbelegung v in \mathfrak{M} ”) wie folgt:

Für n -stellige Relationszeichen R :

$$\mathfrak{M} \models_v R(t_1, \dots, t_n) :\iff \langle \llbracket t_1 \rrbracket_v^{\mathfrak{M}}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_v^{\mathfrak{M}} \rangle \in \mathcal{I}(R)$$

Für die übrigen Formeln:

$$\mathfrak{M} \models_v \neg A :\iff \mathfrak{M} \not\models_v A$$

$$\mathfrak{M} \models_v A \wedge B :\iff \mathfrak{M} \models_v A \text{ und } \mathfrak{M} \models_v B$$

$$\mathfrak{M} \models_v A \vee B :\iff \mathfrak{M} \models_v A \text{ oder } \mathfrak{M} \models_v B$$

$$\mathfrak{M} \models_v A \rightarrow B :\iff \mathfrak{M} \not\models_v A \text{ oder } \mathfrak{M} \models_v B$$

$$\iff \text{Wenn } \mathfrak{M} \models_v A, \text{ dann } \mathfrak{M} \models_v B$$

$$\mathfrak{M} \models_v \forall x A(x) :\iff \text{Für jede } x\text{-Variante } v' \text{ von } v \text{ in } \mathfrak{M}: \mathfrak{M} \models_{v'} A(x)$$

$$\mathfrak{M} \models_v \exists x A(x) :\iff \text{Es gibt eine } x\text{-Variante } v' \text{ von } v \text{ in } \mathfrak{M}: \mathfrak{M} \models_{v'} A(x)$$

Definition 5.8 Sei \mathfrak{M} ein quantorenlogisches Modell. Wir definieren *Gültigkeit im Modell*:

$$\mathfrak{M} \models A :\iff \mathfrak{M} \models_v A \text{ für alle Variablenbelegungen } v \text{ in } \mathfrak{M}$$

Allgemeingültigkeit:

$$\models A :\iff \mathfrak{M} \models A \text{ für alle Modelle } \mathfrak{M}$$

Gültigkeit im Modell

Allgemeingültigkeit

Beispiel. Wir betrachten wieder das Modell $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, \mathcal{I} \rangle$.

– Für beliebige Variablenbelegungen v gilt $\mathfrak{N} \models_v \forall x \exists y Q(x, y)$:

$$\mathfrak{N} \models_v \forall x \exists y Q(x, y) \iff \text{Für jede } x\text{-Variante } v' \text{ von } v \text{ in } \mathfrak{N}: \mathfrak{N} \models_{v'} \exists y Q(x, y)$$

$$\iff \text{Für jede } x\text{-Variante } v' \text{ von } v \text{ in } \mathfrak{N}$$

$$\text{gibt es eine } y\text{-Variante } v'' \text{ von } v' \text{ in } \mathfrak{N}: \mathfrak{N} \models_{v''} Q(x, y)$$

Sei v beliebig, und $v' = v[x \mapsto n]$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Setze $v'' = v'[y \mapsto n + 1]$. Dann ist $\mathfrak{N} \models_{v''} Q(x, y)$, da $\langle \llbracket x \rrbracket_{v''}^{\mathfrak{N}}, \llbracket y \rrbracket_{v''}^{\mathfrak{N}} \rangle = \langle n, n + 1 \rangle \in \mathcal{I}(Q)$.

Da v beliebig, gilt $\mathfrak{N} \models \forall x \exists y Q(x, y)$. Im Modell \mathfrak{N} gilt also $\forall x \exists y Q(x, y)$.

– Die Formel $\forall x \exists y Q(x, y)$ ist jedoch nicht allgemeingültig.

Ein Gegenmodell ist z. B. $\mathfrak{M} = \langle \{m\}, \mathcal{I}' \rangle$ mit $\mathcal{I}'(Q) = \{ \langle m, m' \rangle \mid m \neq m' \}$ (und $\mathcal{I}'(k) = m$ für alle Konstanten $k \in \mathcal{L}$).

Definition 5.9 Sei $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ eine Formelmenge und $A \in \mathcal{L}$ eine Formel. Aus Γ folgt (*quantoren-*)*logisch* A (formal: $\Gamma \models A$), falls für alle Modelle \mathfrak{M} für \mathcal{L} und alle Variablenbelegungen v in \mathfrak{M} gilt: Wenn $\mathfrak{M} \models_v \Gamma$, dann $\mathfrak{M} \models_v A$.

logische Folgerung

5.3 Klassische quantorenlogische Tableaux

Für quantorenlogische Tableaux erweitern wir unser Alphabet um eine abzählbar unendliche Menge von neuen Konstanten a, b, c, \dots , die wir *Individuenparameter* (kurz: *Parameter*) nennen. Dadurch ist sichergestellt, dass wir unbegrenzt viele Konstanten zur Verfügung haben. In der Ausgangsformel komme kein Parameter vor. Zusätzlich fordern wir, dass in der Ausgangsformel keine freien Variablen vorkommen; wir betrachten ausschließlich Tableaux für geschlossene Formeln.

Individuenparameter

Definition 5.10 Ein *quantorenlogisches Tableau* ist ein aussagenlogisches Tableau, in dem zusätzlich die folgenden Regeln verwendet werden dürfen:

quantorenlogisches Tableau

(i) Für eine beliebige Konstante a (einschließlich Parameter):

$$\gamma\text{-Regeln} \left\{ \begin{array}{l} (\forall) \frac{\sigma \forall x A(x)}{\sigma A(a)} \quad (\neg\exists) \frac{\sigma \neg\exists x A(x)}{\sigma \neg A(a)} \end{array} \right.$$

(ii) Für einen Parameter a , der im Zweig noch nicht vorkommt:

$$\delta\text{-Regeln} \left\{ \begin{array}{l} (\exists) \frac{\sigma \exists x A(x)}{\sigma A(a)} \quad (\neg\forall) \frac{\sigma \neg\forall x A(x)}{\sigma \neg A(a)} \end{array} \right.$$

Hierbei drückt $A(a)$ aus, dass die freien Vorkommen der Variable x in $A(x)$ durch den Parameter a ersetzt wurden.

(Die Signaturen σ benötigen wir wieder erst bei modalen quantorenlogischen Tableaux. Bei rein quantorenlogischen Tableaux können sie weggelassen werden.)

Beispiel. Tableaubeweis für $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$:

1. $1 \neg(\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x))$
2. $1 \forall x P(x) \quad (\neg\rightarrow, 1)$
3. $1 \neg\exists x P(x) \quad (\neg\rightarrow, 1)$
4. $1 \neg P(a) \quad (\neg\exists, 3)$
5. $\frac{1 P(a)}{4 \times 5} \quad (\forall, 4)$

Bemerkung. Vergleicht man die quantorenlogischen γ -Regeln mit den modallogischen ν -Regeln, so fällt auf, dass es wegen der bei den ν -Regeln gemachten Beschränkung auf schon im Zweig vorkommende Signaturen $\sigma.n$ keinen Tableaubeweis für

$$\Box A \rightarrow \Diamond A$$

geben kann, während quantorenlogisch

$$\forall x A(x) \rightarrow \exists x A(x)$$

gilt.

Beispiel. Tableaubeweis für $\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$:

1. $1 \neg(\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y))$
2. $1 \exists x \forall y P(x, y) \quad (\neg\rightarrow, 1)$
3. $1 \neg\forall y \exists x P(x, y) \quad (\neg\rightarrow, 1)$
4. $1 \forall y P(a, y) \quad (\exists, 2)$
5. $1 \neg\exists x P(x, b) \quad (\neg\forall, 3)$
6. $1 \neg P(a, b) \quad (\neg\exists, 5)$
7. $\frac{1 P(a, b)}{6 \times 7} \quad (\forall, 4)$

Das Beispiel zeigt, dass δ -Regeln vor γ -Regeln angewendet werden sollten. In Zeile 5 wurde erst die δ -Regel $(\neg\forall)$ auf Zeile 3 angewandt, und danach in Zeile 7 die γ -Regel

(\forall) auf Zeile 4. Bei umgekehrter Reihenfolge wäre kein Widerspruch aufgetreten, da bei Anwendung der δ -Regel ein neuer Parameter gewählt werden muss.

Beispiel. Tableaubeweis für $\exists y(P(y) \rightarrow \forall xP(x))$:

1. $1 \neg \exists y(P(y) \rightarrow \forall xP(x))$
2. $1 \neg(P(a) \rightarrow \forall xP(x))$ ($\neg\exists$, 1)
3. $1 P(a)$ ($\neg\rightarrow$, 2)
4. $1 \neg \forall xP(x)$ ($\neg\rightarrow$, 2)
5. $1 \neg P(b)$ ($\neg\forall$, 4)
6. $1 \neg(P(b) \rightarrow \forall xP(x))$ ($\neg\exists$, 1)
7. $1 P(b)$ ($\neg\rightarrow$, 6)
8. $\frac{1 \neg \forall xP(x)}{5 \times 7}$ ($\neg\rightarrow$, 6)

Hier ist die zweimalige Anwendung der γ -Regel ($\neg\exists$) auf Zeile 1 in den Zeilen 2 und 6 wesentlich, um ein geschlossenes Tableau zu erhalten.

Beispiel. Tableau für $\exists xP(x) \rightarrow \forall xP(x)$:

1. $1 \neg(\exists xP(x) \rightarrow \forall xP(x))$
2. $1 \exists xP(x)$ ($\neg\rightarrow$, 1)
3. $1 \neg \forall xP(x)$ ($\neg\rightarrow$, 1)
4. $1 P(a)$ (\exists , 2)
5. $1 \neg P(b)$ ($\neg\forall$, 3)

Das Tableau kann nicht geschlossen werden, da bei jeder erneuten Anwendung der δ -Regeln (\exists) und ($\neg\forall$) auf die Zeilen 2 und 3 ein neuer Parameter gewählt werden muss.

Theorem 5.11 (Korrektheit und Vollständigkeit) Für geschlossene Formeln A gilt: A ist allgemeingültig genau dann, wenn es einen Tableaubeweis für A gibt.

Beweis. Siehe Anhang B.

QED

5.4 Modale quantorenlogische Tableaux

Wir behandeln weiterhin ausschließlich Tableaux für geschlossene Formeln. Dabei unterscheiden wir zwei Fälle:

- (i) Bei Tableaux für konstante Gegenstandsbereiche wird davon ausgegangen, dass der Gegenstandsbereich für alle Welten derselbe ist.
- (ii) Bei Tableaux für variierende Gegenstandsbereiche darf der Gegenstandsbereich von Welt zu Welt variieren.

5.4.1 Tableaux für konstante Gegenstandsbereiche

Definition 5.12 Ein *modales quantorenlogisches Tableau* (für konstante Gegenstandsbereiche) für K ist ein modallogisches Tableau für K , in dem zusätzlich die in Definition 5.10 angegebenen quantorenlogischen Regeln verwendet werden dürfen.

modales quantorenlogisches Tableau (konst.)

Beispiel. Tableaubeweis für $\diamond \exists xP(x) \rightarrow \exists x \diamond P(x)$:

1. $1 \neg(\diamond\exists xP(x) \rightarrow \exists x\diamond P(x))$
2. $1 \diamond\exists xP(x) \quad (\neg\rightarrow, 1)$
3. $1 \neg\exists x\diamond P(x) \quad (\neg\rightarrow, 1)$
4. $1.1 \exists xP(x) \quad (\diamond, 2)$
5. $1.1 P(a) \quad (\exists, 4)$
6. $1 \neg\diamond P(a) \quad (\neg\exists, 3)$
7. $\frac{1.1 \neg P(a)}{5 \times 7} \quad (\neg\diamond, 6)$

5.4.2 Tableaux für variierende Gegenstandsbereiche

Um Tableaux für variierende Gegenstandsbereiche definieren zu können, müssen wir für jede Signatur jeweils eigene Parameter zur Verfügung haben, die bei keiner anderen Signatur verwendet werden dürfen. Dazu ordnen wir jeder Signatur σ jeweils Parameter $a_\sigma, b_\sigma, c_\sigma, \dots$ zu. Sofern man Signaturen als Namen für Welten und Parameter als Namen für Gegenstände in diesen Welten auffassen möchte, spiegelt dies wider, dass bei Modellen mit variierendem Gegenstandsbereich die jeweiligen Gegenstandsbereiche der Welten prinzipiell paarweise verschieden sein können.

Definition 5.13 Ein *modales quantorenlogisches Tableau* (für variierende Gegenstandsbereiche) für K ist ein modallogisches Tableau für K , in dem zusätzlich die folgenden Regeln für die Quantoren verwendet werden dürfen:

modales quantorenlogisches Tableau (var.)

- (i) Für eine beliebige der Signatur σ zugeordnete Konstante a_σ (einschließlich Parameter):

$$\gamma\text{-Regeln} \left\{ \begin{array}{l} (\forall) \frac{\sigma \forall x A(x)}{\sigma A(a_\sigma)} \quad (\neg\exists) \frac{\sigma \neg\exists x A(x)}{\sigma \neg A(a_\sigma)} \end{array} \right.$$

- (ii) Für einen der Signatur σ zugeordneten Parameter a_σ , der im Zweig noch nicht vorkommt:

$$\delta\text{-Regeln} \left\{ \begin{array}{l} (\exists) \frac{\sigma \exists x A(x)}{\sigma A(a_\sigma)} \quad (\neg\forall) \frac{\sigma \neg\forall x A(x)}{\sigma \neg A(a_\sigma)} \end{array} \right.$$

Beispiel. Tableau für $\forall x \Box P(x) \rightarrow \Box \forall x P(x)$:

1. $1 \neg(\forall x \Box P(x) \rightarrow \Box \forall x P(x))$
2. $1 \forall x \Box P(x) \quad (\neg\rightarrow, 1)$
3. $1 \neg \Box \forall x P(x) \quad (\neg\rightarrow, 1)$
4. $1.1 \neg \forall x P(x) \quad (\neg \Box, 3)$
5. $1.1 \neg P(a_{1.1}) \quad (\neg \forall, 4)$
6. $1 \Box P(a_1) \quad (\forall, 2)$
7. $1.1 P(a_1) \quad (\Box, 6)$
- \vdots

Das Tableau ist offen, und kann nicht geschlossen werden, da bei erneuten Anwendungen von $(\neg\forall, 4)$ nie der Parameter a_1 , bzw. bei $(\forall, 2)$ nie $a_{1.1}$, gewählt werden kann.

Für geschlossene Formeln sind die beiden Arten von Tableaux jeweils korrekt und vollständig für die in den Abschnitten 5.6 und 5.7 angegebenen Semantiken.

5.5 *De re* und *de dicto*

Die Modaloperatoren \Box und \Diamond können als Quantoren aufgefasst werden, deren Gegenstandsbereich eine Menge (erreichbarer) möglicher Welten ist. In der modalen Quantorenlogik kommen als weitere Quantoren \forall und \exists hinzu, mit denen über Gegenstände in möglichen Welten quantifiziert werden kann. Bei beiden Arten von Quantoren ist der Wirkungsbereich die unmittelbare Teilformel (z. B. ist A in $\Box A$ im Wirkungsbereich von \Box). Quantoren einer Art können im Wirkungsbereich von Quantoren der anderen Art vorkommen. Dies ermöglicht die semantische Unterscheidung zwischen modalen Eigenschaften von Gegenständen (*de re*) und von Aussagen (*de dicto*).

Beispiel. Wir betrachten den Satz

Alles ist notwendigerweise P .

Es können zwei Lesarten unterschieden werden:

Es ist notwendig wahr, dass alles P ist.

und

Jeder Gegenstand ist derart, dass er notwendigerweise P ist.

Die erste Lesart ist *de dicto*, da ausgedrückt wird, dass eine Aussage (“alles ist P ”) notwendig wahr ist. Die zweite Lesart ist *de re*, da ausgedrückt wird, dass Gegenstände eine Eigenschaft notwendigerweise haben.

Beispiel. Der Satz

Etwas existiert notwendigerweise

drückt in der *de dicto*-Lesart aus:

Es ist notwendig wahr, dass etwas existiert.

Setzt man für jede (erreichbare) mögliche Welt einen nichtleeren Gegenstandsbereich voraus (wie auch in der Semantik der Quantorenlogik für jedes Modell geschehen), so gilt diese Aussage. In der *de re*-Lesart drückt der Satz hingegen aus:

Es gibt etwas, das notwendigerweise existiert.

Damit diese Aussage gilt, muss es einen Gegenstand geben, der in jeder (erreichbaren) möglichen Welt existiert.

Im Rahmen der modalen Quantorenlogik ist die Unterscheidung zwischen *de re* und *de dicto* eine Unterscheidung bezüglich des Wirkungsbereichs von Quantoren und Modaloperatoren.

Der Satz

Alles ist notwendigerweise P

wird *de dicto* als

$\Box \forall x P(x)$

formalisiert. Diese Formel gilt einer möglichen Welt, falls die Teilformel $\forall xP(x)$ in allen von dieser Welt aus erreichbaren Welten gilt, d. h. falls in jeder dieser Welten alle jeweils dort vorhandenen Gegenstände die dem Relationszeichen P zugeordnete Eigenschaft haben. Die *de re*-Formalisierung ist

$$\forall x \Box P(x)$$

Diese Formel gilt in einer möglichen Welt, falls für alle in dieser Welt vorhandenen Gegenstände gilt, dass sie in jeder erreichbaren Welt die dem Relationszeichen P zugeordnete Eigenschaft haben.

Entsprechend formalisiert man den Satz

Etwas ist notwendigerweise P

de dicto als

$$\Box \exists x P(x)$$

Diese Formel gilt in einer möglichen Welt, falls es in jeder von dieser Welt aus erreichbaren Welt einen Gegenstand gibt, für den P gilt. Der Gegenstand kann also von Welt zu Welt verschieden sein; es muss nur jeweils P für ihn gelten. Die *de re*-Formalisierung lautet

$$\exists x \Box P(x)$$

Diese Formel gilt in einer möglichen Welt, falls es einen Gegenstand in ihr gibt, für den in jeder von dieser Welt aus erreichbaren Welt P gilt. Hier muss P also in jeder der erreichbaren Welten auf denselben Gegenstand zutreffen.

Bezüglich des für die Quantoren \forall und \exists relevanten Gegenstandsbereichs hat man in der Semantik der modalen Quantorenlogik die Wahl, ob man nur *einen* Gegenstandsbereich für alle Welten verwendet, oder ob man von Welt zu Welt *verschiedene* Gegenstandsbereiche zulässt. Wir behandeln zunächst die erste Option, danach auch die zweite. Dabei beschränken wir uns auf quantorenlogische Erweiterungen der Logik K.

Die in der modalen Aussagenlogik behandelten anderen Standardmodallogiken können ebenfalls quantorenlogisch erweitert werden. In der Semantik werden dazu einfach die entsprechenden Rahmeneigenschaften gefordert. Bei den Tableaunkalkülen lässt man die entsprechenden zusätzlichen Regelpaare zu. Dies funktioniert in beiden Fällen unabhängig davon, ob konstante oder variierende Gegenstandsbereiche betrachtet werden.

5.6 Semantik für konstante Gegenstandsbereiche

In der Semantik für konstante Gegenstandsbereiche werden ausschließlich Modelle betrachtet, in denen der Gegenstandsbereich für alle Welten gleich ist.

Definition 5.14 Ein *für konstante Gegenstandsbereiche erweiterter Rahmen* ist ein Tripel $\langle W, R_E, M \rangle$, wobei W wieder eine nichtleere Menge von Welten ist, R_E die Erreichbarkeitsrelation bezeichnet, und M eine nichtleere Menge, der Gegenstandsbereich, ist. *erweiterter Rahmen*

Definition 5.15 Sei $\langle W, R_E, M \rangle$ ein Rahmen und \mathcal{L} eine Sprache. Eine *modallogische Interpretation* \mathcal{I} (für konstante Gegenstandsbereiche) ist eine Funktion, die jeder Welt $w \in W$ eine Interpretation für \mathcal{L} zuordnet wie folgt: *modallogische Interpretation*

- (i) $\mathcal{I}(k, w) \in M$ für $w \in W$ und Konstanten $k \in \mathcal{L}$,
- (ii) $\mathcal{I}(R, w) \subseteq M^n$, falls $w \in W$ und $R \in \mathcal{L}$ ein n -stelliges Relationszeichen ist für $n \geq 1$,
- (iii) $\mathcal{I}(R, w) \in \{w, f\}$, falls $w \in W$ und $R \in \mathcal{L}$ ein 0-stelliges Relationszeichen, d. h. ein Aussagesymbol ist, und $w := \emptyset, f := M$.

Definition 5.16 Ein (*quantorenlogisches modales*) *Modell* (für konstante Gegenstandsbereiche) ist ein Quadrupel $\langle W, R_E, M, \mathcal{I} \rangle$, bestehend aus einem erweiterten Rahmen $\langle W, R_E, M \rangle$ und einer modallogischen Interpretation \mathcal{I} .

Modell

Gültigkeit in einem quantorenlogischen modalen Modell können wir nun als Verallgemeinerung von Gültigkeit in einem quantorenlogischen Modell definieren, indem wir die um die Modaloperatoren erweiterte Sprache der Quantorenlogik betrachten, und die zusätzliche Abhängigkeit von möglichen Welten berücksichtigen.

Variablenbelegungen v sind definiert wie bisher, werden also unabhängig von Welten $w \in W$ angegeben. Bei Termbelegungen für Konstanten k muss aber die zusätzliche Abhängigkeit der Interpretation \mathcal{I} von Welten $w \in W$ berücksichtigt werden; d. h. es ist $\llbracket k \rrbracket_v^w := \mathcal{I}(k, w)$. Da dies zu weiteren Komplikationen führt, betrachten wir zunächst nur Sprachen \mathcal{L} ohne Konstanten. Als Terme kommen also nur Variablen vor, so dass lediglich Variablenbelegungen v eine Rolle spielen. Auf die Behandlung von Konstanten werden wir in Abschnitt 5.9 eingehen.

Definition 5.17 Sei \mathfrak{M} ein quantorenlogisches modales Modell $\langle W, R_E, M, \mathcal{I} \rangle$, w eine Welt in W und v eine Variablenbelegung. Wir definieren die Relation $\mathfrak{M}, w \models_v A$ (“ A gilt im Modell \mathfrak{M} in der Welt $w \in W$ unter der Variablenbelegung v in \mathfrak{M} ”) wie folgt:

A gilt in \mathfrak{M} in Welt w unter v

Für n -stellige Relationszeichen R :

$$\mathfrak{M}, w \models_v R(x_1, \dots, x_n) \iff \langle v(x_1), \dots, v(x_n) \rangle \in \mathcal{I}(R, w)$$

Für die aussagenlogischen Konnektive:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}, w \models_v \neg A & \iff \mathfrak{M} \not\models_v A \\ \mathfrak{M}, w \models_v A \wedge B & \iff \mathfrak{M}, w \models_v A \text{ und } \mathfrak{M}, w \models_v B \\ \mathfrak{M}, w \models_v A \vee B & \iff \mathfrak{M}, w \models_v A \text{ oder } \mathfrak{M}, w \models_v B \\ \mathfrak{M}, w \models_v A \rightarrow B & \iff \mathfrak{M}, w \not\models_v A \text{ oder } \mathfrak{M}, w \models_v B \\ & \iff \text{Wenn } \mathfrak{M}, w \models_v A, \text{ dann } \mathfrak{M}, w \models_v B \end{aligned}$$

Für die Quantoren:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}, w \models_v \forall x A(x) & \iff \text{Für jede } x\text{-Variante } v' \text{ von } v \text{ in } \mathfrak{M}: \mathfrak{M}, w \models_{v'} A(x) \\ \mathfrak{M}, w \models_v \exists x A(x) & \iff \text{Es gibt eine } x\text{-Variante } v' \text{ von } v \text{ in } \mathfrak{M}: \mathfrak{M}, w \models_{v'} A(x) \end{aligned}$$

Für die Modaloperatoren:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}, w \models_v \Box A & \iff \text{Für alle } w' \in W: \text{wenn } wR_E w', \text{ dann } \mathfrak{M}, w' \models_v A \\ \mathfrak{M}, w \models_v \Diamond A & \iff \text{Es gibt } w' \in W: wR_E w' \text{ und } \mathfrak{M}, w' \models_v A \end{aligned}$$

Theorem 5.18 Sei $\mathfrak{M} = \langle W, R_E, M, \mathcal{I} \rangle$ mit $w \in W$. Seien v und v' zwei Variablenbelegungen in \mathfrak{M} und A eine Formel. Es gilt

$$\mathfrak{M}, w \models_v A \iff \mathfrak{M}, w \models_{v'} A$$

falls $v = v'$ für alle freien Variablen in A .

Beweis. Per Induktion über dem Formelaufbau. (Übungsaufgabe)

QED

Korollar 5.19 Sei $\mathfrak{M} = \langle W, R_E, M, \mathcal{I} \rangle$ mit $w \in W$. Für geschlossene Formeln A gilt: Wenn $\mathfrak{M}, w \models_v A$ für eine Variablenbelegung v in \mathfrak{M} , dann $\mathfrak{M}, w \models A$ für jede Variablenbelegung v in \mathfrak{M} . (Die umgekehrte Richtung gilt trivialerweise.)

Definition 5.20 Sei \mathfrak{M} ein quantorenlogisches modales Modell $\langle W, R_E, M, \mathcal{I} \rangle$ und w eine Welt in W . Wir definieren die Relation $\mathfrak{M}, w \models A$ (“ A gilt im Modell \mathfrak{M} in der Welt $w \in W$ ”) wie folgt: $\mathfrak{M}, w \models A \iff \mathfrak{M}, w \models_v A$ für jede Variablenbelegung v in \mathfrak{M} .

A gilt in \mathfrak{M} in Welt w

Definition 5.21 Wir definieren

Gültigkeit im Modell:

$$\mathfrak{M} \models A \iff \text{Für alle } w \in W \text{ von } \mathfrak{M}: \mathfrak{M}, w \models A$$

Gültigkeit im Modell

Gültigkeit im Rahmen:

$$\langle W, R_E, M \rangle \models A \iff \text{Für alle Interpretationen } \mathcal{I}: \langle W, R_E, M, \mathcal{I} \rangle \models A$$

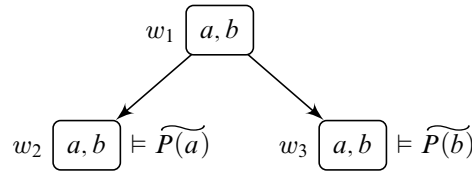
Gültigkeit im Rahmen

Allgemeingültigkeit:

$$\begin{aligned} \models A &\iff \text{Für alle Rahmen } \langle W, R_E, M \rangle: \langle W, R_E, M \rangle \models A \\ &\iff \text{Für alle Modelle } \mathfrak{M}: \mathfrak{M} \models A \end{aligned}$$

Allgemeingültigkeit

Beispiel. Wir betrachten eine Sprache \mathcal{L} , die als einziges Relationszeichen das 1-stellige P enthalte. Sei \mathfrak{M} das quantorenlogische modale Modell $\langle W, R_E, M, \mathcal{I} \rangle$ mit der Menge möglicher Welten $W = \{w_1, w_2, w_3\}$, der Erreichbarkeitsrelation $R_E = \{\langle w_1, w_2 \rangle, \langle w_1, w_3 \rangle\}$, dem konstanten Gegenstandsbereich $M = \{a, b\}$ und der Interpretation $\mathcal{I}(P, w_1) = \emptyset$, $\mathcal{I}(P, w_2) = \{a\}$ und $\mathcal{I}(P, w_3) = \{b\}$. Als Diagramm:



- Die Elemente von M stehen in den Kästchen der jeweiligen Welten; es steht in allen Kästchen dasselbe, da \mathfrak{M} ein Modell mit konstantem Gegenstandsbereich ist.
- $\widetilde{P(a)}$ zeigt an, dass die Formel $P(x)$ in \mathfrak{M} in w_2 unter der Interpretation $\mathcal{I}(P, w_2) = \{a\}$ gilt. Entsprechend für $\widetilde{P(b)}$ in w_3 .

Nun zeigen wir, dass die Formel $\forall x \Diamond P(x) \rightarrow \Diamond \forall x P(x)$ in \mathfrak{M} *nicht* gilt, indem wir zeigen, dass

$$\mathfrak{M}, w_1 \not\models \forall x \Diamond P(x) \rightarrow \Diamond \forall x P(x)$$

Da die Formel geschlossen ist, müssen wir für eine beliebige Variablenbelegung v in \mathfrak{M}

$$\mathfrak{M}, w_1 \not\models_v \forall x \Diamond P(x) \rightarrow \Diamond \forall x P(x)$$

zeigen. Dazu betrachten wir die x -Variante $v' = v[x \mapsto a]$. Da $\mathcal{I}(P, w_2) = \{a\}$ und $v'(x) = a$, ist $v'(x) \in \mathcal{I}(P, w_2)$. Nach Definition 5.17 (Klausel für Relationszeichen) ist dann $\mathfrak{M}, w_2 \models_{v'} P(x)$, und folglich $\mathfrak{M}, w_1 \models_{v'} \Diamond P(x)$, da $w_1 R_E w_2$. Entsprechend zeigt

man für die x -Variante $v'' = v[x \mapsto b]$, dass $\mathfrak{M}, w_1 \models_{v''} \Diamond P(x)$. Da $M = \{a, b\}$ sind durch v' und v'' alle x -Varianten berücksichtigt, so dass nach Definition 5.17 (Klausel für Allquantor) gilt: $\mathfrak{M}, w_1 \models_v \forall x \Diamond P(x)$.

Angenommen, es gilt auch $\mathfrak{M}, w_1 \models_v \Diamond \forall x P(x)$. Dann muss

$$\mathfrak{M}, w_2 \models_v \forall x P(x) \quad \text{oder} \quad \mathfrak{M}, w_3 \models_v \forall x P(x)$$

gelten, da $w_1 R_E w_2$ und $w_1 R_E w_3$. Im ersten Fall muss dann nach Definition 5.17 (Klausel für Allquantor) für jede x -Variante v^* von v gelten: $\mathfrak{M}, w_2 \models_{v^*} P(x)$. Für die x -Variante $v^* = v'' = v[x \mapsto b]$ ist dies jedoch nicht der Fall, da $v''(x) \notin \mathcal{I}(P, w_2)$. Im zweiten Fall zeigt man für die x -Variante $v' = v[x \mapsto a]$ entsprechend, dass $\mathfrak{M}, w_3 \not\models_{v'} \forall x P(x)$ folgt, da $\mathfrak{M}, w_3 \not\models_{v'} P(x)$ wegen $v'(x) \notin \mathcal{I}(P, w_3)$. Somit haben wir

$$\mathfrak{M}, w_1 \models_v \forall x \Diamond P(x) \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}, w_1 \not\models_v \Diamond \forall x P(x)$$

und folglich

$$\mathfrak{M}, w_1 \not\models_v \forall x \Diamond P(x) \rightarrow \Diamond \forall x P(x)$$

Die Formel $\forall x \Diamond P(x) \rightarrow \Diamond \forall x P(x)$ gilt also im Modell \mathfrak{M} nicht (und ist damit auch nicht allgemeingültig).

Beispiel. Wir zeigen, dass $\Diamond \forall x P(x) \rightarrow \forall x \Diamond P(x)$ allgemeingültig ist für Modelle $\mathfrak{M} = \langle W, R_E, M, \mathcal{I} \rangle$ mit konstantem Gegenstandsbereich. Es sei $w \in W$ und v eine Variablenbelegung in \mathfrak{M} .

Um $\mathfrak{M}, w \models_v \Diamond \forall x P(x) \rightarrow \forall x \Diamond P(x)$ zu zeigen, müssen wir zeigen, dass

$$\text{wenn } \mathfrak{M}, w \models_v \Diamond \forall x P(x), \text{ dann } \mathfrak{M}, w \models_v \forall x \Diamond P(x)$$

Angenommen $\mathfrak{M}, w \models_v \Diamond \forall x P(x)$. Dann muss es eine Welt w' mit $w R_E w'$ geben, so dass $\mathfrak{M}, w' \models_{v'} \forall x P(x)$. Nach Definition 5.17 (Klausel für Allquantor) muss dann $\mathfrak{M}, w' \models_{v'} P(x)$ für beliebige x -Varianten v' von v in \mathfrak{M} gelten. Da $w R_E w'$, gilt dann $\mathfrak{M}, w \models_{v'} \Diamond P(x)$, und da v' eine beliebige x -Variante von v ist, gilt $\mathfrak{M}, w \models_v \forall x \Diamond P(x)$. Da Modell \mathfrak{M} , Welt $w \in W$ und Variablenbelegung v beliebig, gilt $\models \Diamond \forall x P(x) \rightarrow \forall x \Diamond P(x)$.

5.7 Semantik für variierende Gegenstandsbereiche

Für konstante Gegenstandsbereiche M gilt z. B. $\models \forall x A(x) \rightarrow A(y)$, da $v(y)$ in jedem Fall ein Gegenstand ist, der in der für den Allquantor in $\forall x A(x)$ relevanten Welt vorkommt. Gilt $\forall x A(x)$ für M , so kann es keinen Gegenstand $v(y) \in M$ geben, für den $A(y)$ nicht gilt. Dies entspricht der klassischen (nicht-modalen) Quantorenlogik, in der sich die Quantoren immer auf *einen* Gegenstandsbereich M beziehen.

Hingegen gilt $\models \forall x A(x) \rightarrow A(y)$ *nicht* für Modelle, in denen der Gegenstandsbereich M von Welt zu Welt variieren kann. Um solche Modelle zu erhalten, ersetzen wir die Menge M einfach durch eine Funktion, die jeder Welt $w \in W$ einen eigenen Gegenstandsbereich $M(w)$ zuordnet. Die Gegenstandsbereiche verschiedener Welten können gleich sein (wodurch der Fall konstanter Gegenstandsbereiche mit eingeschlossen ist), sich überschneiden, oder aber paarweise verschieden sein. Es gilt dann i. A. *nicht* mehr, dass in jedem Fall $v(y) \in M(w)$. Dann kann aber $\forall x A(x)$ in w gelten (falls für jede x -Variante $v'(x) \in M(w)$ die Formel $A(x)$ gilt), ohne dass auch $A(y)$ in w gelten müsste; denn für $v(y) \in M(w')$ und $v(y) \notin M(w)$ ist $v(y) \neq v'(x) \in M(w)$.

Es können somit zwei Situationen unterschieden werden, in denen eine Formel $A(x)$ in einer Welt w gilt:

- (i) $A(x)$ gilt in w , und $v(x) \in M(w)$,
- (ii) $A(x)$ gilt in w , aber möglicherweise $v(x) \notin M(w)$.

Die erste Situation kann man durch konstante Gegenstandsbereiche M erzwingen. Der Gegenstandsbereich $M(w)$ enthält dann alle möglichen Gegenstände, da $M(w) = M$ für alle Welten w . Man spricht in diesem Fall auch von *possibilistischer Quantifikation*. Es gelten (sofern Konstanten in jeder Welt denselben Gegenstand bezeichnen oder aber gar nicht vorkommen) die klassischen Gesetze, wie z. B. $\forall x A(x) \rightarrow A(y)$.

*possibilistische
Quantifikation*

Die zweite Situation liegt bei variierenden Gegenstandsbereichen vor. Hier kann zwar $v(x)$ ein Gegenstand in irgendeiner möglichen Welt sein (d. h. $v(x) \in M(w')$ für beliebige Welten w'), die Quantoren beziehen sich aber immer nur auf Gegenstände in der aktuellen Welt. Dies bezeichnet man auch als *aktualistische Quantifikation*. Für diese Quantoren gelten die klassischen Gesetze nicht mehr uneingeschränkt; es ist dann z. B. $\not\equiv \forall x A(x) \rightarrow A(y)$. Die resultierende Modallogik ist also keine konservative Erweiterung der klassischen (nicht-modalen) Quantorenlogik.

*aktualistische
Quantifikation*

Variierende Gegenstandsbereiche erfordern im Vergleich zu konstanten Gegenstandsbereichen eine etwas kompliziertere Semantik. Sie entsprechen aber eher unserer Intuition, dass bestimmte Gegenstände nicht in jeder möglichen Welt existieren müssen (man denke etwa an Fabelwesen wie Pegasus, oder an mögliche Zeitpunkte, zu denen etwas nicht mehr oder noch nicht existiert).

Wir betrachten wieder ausschließlich Sprachen \mathcal{L} ohne Individuenkonstanten k .

Definition 5.22 Ein für variierende Gegenstandsbereiche erweiterter Rahmen ist ein Tripel $\langle W, R_E, M \rangle$, wobei $\langle W, R_E \rangle$ ein Rahmen ist, und M eine Funktion ist, die jeder Welt $w \in W$ eine nichtleere Menge $M(w)$, den Gegenstandsbereich von w , zuordnet.

erweiterter Rahmen

Ist M eine konstante Funktion, die jeder Welt dieselbe Menge von Gegenständen zuordnet, so ist der für variierende Gegenstandsbereiche erweiterte Rahmen $\langle W, R_E, M \rangle$ auch ein erweiterter Rahmen für konstante Gegenstandsbereiche. Variierende Gegenstandsbereiche schließen also für entsprechende Funktionen M konstante Gegenstandsbereiche mit ein.

Definition 5.23 Sei $\mathfrak{F} = \langle W, R_E, M \rangle$ ein für variierende Gegenstandsbereiche erweiterter Rahmen. Dann ist $M(\mathfrak{F}) := \bigcup \{M(w) \mid w \in W\}$ der *Gegenstandsbereich des Rahmens* \mathfrak{F} .

$M(\mathfrak{F})$

Für einen Rahmen $\mathfrak{F} = \langle W, R_E, M \rangle$ mit $w \in W$ ist $M(w)$ die Menge der Gegenstände, die in w existieren. Die Menge $M(\mathfrak{F})$ enthält alle Gegenstände, über die wir in jeder Welt $w \in W$ etwas aussagen können, unabhängig davon, ob der jeweilige Gegenstand in w existiert oder nicht.

Definition 5.24 Sei $\mathfrak{F} = \langle W, R_E, M \rangle$ ein Rahmen für variierende Gegenstandsbereiche und \mathcal{L} eine Sprache. Eine *modallogische Interpretation* \mathcal{I} (für variierende Gegenstandsbereiche) ist eine Funktion, die jeder Welt $w \in W$ eine Interpretation für \mathcal{L} zuordnet wie folgt:

*modallogische
Interpretation*

- (i) $\mathcal{I}(R, w) \subseteq M(\mathfrak{F})^n$, falls $w \in W$ und $R \in \mathcal{L}$ ein n -stelliges Relationszeichen ist für $n \geq 1$,
- (ii) $\mathcal{I}(R, w) \in \{w, f\}$, falls $w \in W$ und $R \in \mathcal{L}$ ein 0-stelliges Relationszeichen, d. h. ein Aussagesymbol ist, und $w := \emptyset, f := M(\mathfrak{F})$.

Man beachte, dass \mathcal{I} einem n -stelligen Relationszeichen R für eine Welt w nicht nur Elemente (d. h. n -Tupel) in $M(w)^n$ zuordnen kann, sondern beliebige Elemente in $M(\mathfrak{F})^n$, die natürlich nicht in jedem Fall auch Element der Menge $M(w)^n$ sein müssen. Sei z. B. $W = \{w_1, w_2\}$, $M(w_1) = \{a\}$ und $M(w_2) = \{b\}$. Dann ist $M(\mathfrak{F}) = \{a, b\}$, und für das 1-stellige Relationszeichen P ist $\mathcal{I}(P, w_1) = \{b\} \subseteq M(\mathfrak{F})$ eine zulässige Interpretation von P in w_1 . Dass $b \in M(\mathfrak{F})$, aber $b \notin M(w_1)$, ist dabei irrelevant.

Definition 5.25 Sei $\mathfrak{F} = \langle W, R_E, M \rangle$ ein Rahmen für variierende Gegenstandsbereiche und \mathcal{I} eine Interpretation für variierende Gegenstandsbereiche. Dann ist $\mathfrak{M} = \langle W, R_E, M, \mathcal{I} \rangle$ ein (*quantorenlogisches modales*) *Modell* für variierende Gegenstandsbereiche.

Modell

Es ist $M(\mathfrak{M}) := M(\mathfrak{F})$ der *Gegenstandsbereich des Modells* \mathfrak{M} .

$M(\mathfrak{M})$

Definition 5.26 Variablenbelegungen und x -Varianten in einem Modell \mathfrak{M} sind definiert wie bisher, d. h. als Funktionen, die (unabhängig von Welten $w \in W$) Variablen Gegenstände in $M(\mathfrak{M})$ zuordnen.

Zusätzlich sagen wir für eine Welt $w \in W$, dass eine Variablenbelegung v' eine x -Variante von v in w ist, falls $v'(x) \in M(w)$.

x -Variante von v in w

Definition 5.27 Sei \mathfrak{M} ein quantorenlogisches modales Modell $\langle W, R_E, M, \mathcal{I} \rangle$ (für variierende Gegenstandsbereiche), w eine Welt in W und v eine Variablenbelegung. Zur Definition der Relation $\mathfrak{M}, w \models_v A$ (“ A gilt im Modell \mathfrak{M} in der Welt $w \in W$ unter der Variablenbelegung v in \mathfrak{M} ”) für variierende Gegenstandsbereiche übernehmen wir die Definition 5.17 (für konstante Gegenstandsbereiche) bis auf die Klauseln für die Quantoren. Für diese soll nun gelten:

A gilt in \mathfrak{M} in Welt w unter v

$\mathfrak{M}, w \models_v \forall x A(x) : \iff$ Für jede x -Variante v' von v in w in \mathfrak{M} : $\mathfrak{M}, w \models_{v'} A(x)$

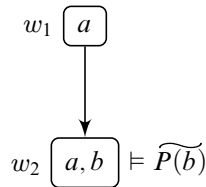
$\mathfrak{M}, w \models_v \exists x A(x) : \iff$ Es gibt eine x -Variante v' von v in w in \mathfrak{M} : $\mathfrak{M}, w \models_{v'} A(x)$

Im Gegensatz zu konstanten Gegenstandsbereichen wird hier jeweils $v'(x) \in M(w)$ verlangt (während im Fall konstanter Gegenstandsbereiche $v'(x) \in M = M(\mathfrak{M})$).

Definition 5.28 Theorem 5.18 und Korollar 5.19 gelten unverändert auch für Modelle mit variierendem Gegenstandsbereich, so dass wir Definition 5.20 (“ $\mathfrak{M}, w \models A$ ”) und Definition 5.21 (*Gültigkeit im Modell*, *Gültigkeit im Rahmen* und *Allgemeingültigkeit*) direkt für Modelle mit variierendem Gegenstandsbereich übernehmen können.

Gültigkeit,
Allgemeingültigkeit

Beispiel. Sei $\mathfrak{M} = \langle W, R_E, M, \mathcal{I} \rangle$ mit $W = \{w_1, w_2\}$, $R_E = \{\langle w_1, w_2 \rangle\}$, $M(w_1) = \{a\}$, $M(w_2) = \{a, b\}$ und $\mathcal{I}(P, w_1) = \emptyset$, $\mathcal{I}(P, w_2) = \{b\}$ für das 1-stellige Relationszeichen P . Als Diagramm:



Wir zeigen, dass $\mathfrak{M} \not\models \diamond \exists x P(x) \rightarrow \exists x \diamond P(x)$. Sei v eine beliebige Variablenbelegung und $v' = v[x \mapsto b]$. Wegen $\mathcal{I}(P, w_2) = \{b\}$ gilt dann $\mathfrak{M}, w_2 \models_{v'} P(x)$. Da v' eine

x -Variante in w_2 ist (es ist $v'(x) = b \in M(w_2)$), folgt (Klausel für Existenzquantor) $\mathfrak{M}, w_2 \models_v \exists x P(x)$, und damit wegen $w_1 R_E w_2$ auch (Klausel für \diamond) $\mathfrak{M}, w_1 \models_v \diamond \exists x P(x)$. Das Antezedens von $\diamond \exists x P(x) \rightarrow \exists x \diamond P(x)$ gilt also in \mathfrak{M} in w_1 unter v .

Für das Sukzedens nehmen wir an, dass $\mathfrak{M}, w_1 \models_v \exists x \diamond P(x)$. Unter dieser Annahme muss es eine x -Variante v' von v in w_1 geben, so dass (Klausel für Existenzquantor) $\mathfrak{M}, w_1 \models_{v'} \diamond P(x)$. Da nur $a \in M(w_1)$, muss $v'(x) = a$ sein. Es folgt (Klausel für \diamond) $\mathfrak{M}, w_2 \models_{v'} P(x)$, da w_1 nur w_2 sieht. Nun ist aber $v'(x) = a \notin \mathcal{I}(P, w_2)$, also $\mathfrak{M}, w_2 \not\models_{v'} P(x)$; Widerspruch. Folglich gilt $\mathfrak{M}, w_1 \not\models_v \exists x \diamond P(x)$. Damit gilt $\mathfrak{M}, w_1 \not\models_v \diamond \exists x P(x) \rightarrow \exists x \diamond P(x)$, woraus folgt: $\mathfrak{M} \not\models \diamond \exists x P(x) \rightarrow \exists x \diamond P(x)$. Somit ist die Formel auch nicht allgemeingültig.

Definition 5.29 Zur Definition der (*modalen quantoren-*)*logischen Folgerung* ($\Gamma \models A$) wählen wir den lokalen Folgerungsbegriff (vgl. Abschnitt 4.3). Sei $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ eine Formelmengenge, $\mathfrak{M} = \langle W, R_E, M, \mathcal{I} \rangle$ ein quantorenlogisches modales Modell für \mathcal{L} , $w \in W$ und v eine Variablenbelegung in \mathfrak{M} . Dann ist

*logische
Folgerung*

$$\Gamma \models A \quad :\iff \quad \text{Für alle } \mathfrak{M}, w \text{ und } v \text{ gilt: Wenn } \mathfrak{M}, w \models_v \Gamma \text{ dann } \mathfrak{M}, w \models_v A$$

Hierbei haben alle Modelle \mathfrak{M} entweder konstante oder variierende Gegenstandsbereiche.

5.8 Verhältnis von possibilistischer und aktualistischer Quantifikation

Man kann zeigen, dass die Semantik für konstante Gegenstandsbereiche (possibilistische Quantifikation) in die Semantik für variierende Gegenstandsbereiche (aktualistische Quantifikation) eingebettet werden kann, sofern für letztere zusätzlich die Gültigkeit der Barcanschen Formeln angenommen wird (benannt nach Ruth Barcan Marcus, 1921–2012). Umgekehrt kann man zeigen, dass die Semantik für variierende Gegenstandsbereiche in die Semantik für konstante Gegenstandsbereiche eingebettet werden kann, sofern für letztere ein Existenzprädikat zur Verfügung steht. Die eine Semantik muss der anderen also nicht unbedingt vorgezogen werden, da für beide Semantiken Mittel zur Simulation der jeweils anderen zur Verfügung stehen.

Wir schreiben im Folgenden auch

- $\mathfrak{M}_{\text{konst}} = \langle W_k, R_k, M_k, \mathcal{I}_k \rangle$ für Modelle mit konstantem Gegenstandsbereich, und
- $\mathfrak{M}_{\text{var}} = \langle W_v, R_v, M_v, \mathcal{I}_v \rangle$ für Modelle mit variierendem Gegenstandsbereich.

5.8.1 Barcansche Formeln und aktualistische Quantifikation

Definition 5.30 Als *Barcansche Formeln* bezeichnet man alle Formeln der Formen

Barcansche Formeln

- (i) $\forall x \Box A(x) \rightarrow \Box \forall x A(x)$,
- (ii) $\diamond \exists x A(x) \rightarrow \exists x \diamond A(x)$,

wobei $A(x)$ eine beliebige Formel ist, in der x frei vorkommen kann.

Barcansche Formeln $\diamond \exists x B(x) \rightarrow \exists x \diamond B(x)$ der Form (ii) sind äquivalent zu Formeln $\forall x \Box \neg B(x) \rightarrow \Box \forall x \neg B(x)$, d. h. zu Barcanschen Formeln der Form (i) mit $A(x) = \neg B(x)$. Ebenso können für Barcansche Formeln der Form (i) äquivalente Barcansche Formeln der Form (ii) angegeben werden. Man könnte sich also auch auf Formeln nur einer Form beschränken.

Definition 5.31 Als *konverse Barcansche Formeln* bezeichnet man alle Formeln der Formen

konverse Barcansche Formeln

- (i) $\Box\forall xA(x) \rightarrow \forall x\Box A(x)$,
- (ii) $\exists x\Diamond A(x) \rightarrow \Diamond\exists xA(x)$,

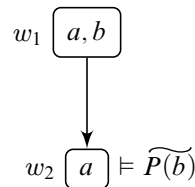
wobei $A(x)$ wieder eine beliebige Formel ist, in der x frei vorkommen kann. (Auch hier könnte man sich auf eine der beiden Formen beschränken.)

Man bezeichnet die (konversen) Barcanschen Formeln der angegebenen Formen auch einfach als *die* (konverse) Barcansche Formel. Sagt man, dass die Formel gilt, so meint man, dass alle Formeln der Form gelten. Gilt eine der Formeln der Form nicht, so sagt man, dass die (konverse) Barcansche Formel nicht gilt.

- Bemerkungen.**
- (i) Die konverse Barcansche Formel besagt, dass beim Übergang zu einer möglichen Welt kein Gegenstand aufhört zu existieren. (Monotonie)
 - (ii) Die Barcansche Formel besagt, dass beim Übergang zu einer möglichen Welt keine neuen Gegenstände hinzukommen. (Anti-Monotonie)
 - (iii) Beide Formeln zusammen besagen, dass in jeder Welt dieselben Gegenstände existieren.

Weder die Barcansche noch die konverse Barcansche Formel ist für Modelle mit variierendem Gegenstandsbereich allgemeingültig:

- (i) In Abschnitt 5.7 haben wir gezeigt, dass $\Diamond\exists xP(x) \rightarrow \exists x\Diamond P(x)$ nicht allgemeingültig ist. Da dies eine Instanz der Barcanschen Formel ist, kann die Barcansche Formel nicht allgemeingültig sein.
- (ii) Auch die konverse Barcansche Formel ist nicht allgemeingültig für Modelle mit variierendem Gegenstandsbereich. Denn



ist ein Gegenmodell für die Instanz $\exists x\Diamond P(x) \rightarrow \Diamond\exists xP(x)$.

Theorem 5.32 Sei A eine geschlossene Formel. Für alle Modelle $\mathfrak{M}_{\text{konst}}$ gilt $\mathfrak{M}_{\text{konst}} \models A$ genau dann, wenn für alle Modelle $\mathfrak{M}_{\text{var}}$ unter der Annahme von Barcanscher und konverser Barcanscher Formel $\mathfrak{M}_{\text{var}} \models A$ gilt.

Beweis. Siehe Fitting & Mendelsohn (1998, § 4.9) oder Piecha (2014, § 5.6). QED

Setzt man also für Modelle mit variierendem Gegenstandsbereich die Allgemeingültigkeit von sowohl der Barcanschen Formel (BF) als auch der konversen Barcanschen Formel (KBF) voraus, so kann die Semantik für konstante Gegenstandsbereiche (possibilistische Quantifikation) in die Semantik für variierende Gegenstandsbereiche (aktualistische Quantifikation) eingebettet werden. Salopp formuliert:

“Aktualistische Quantifikation + BF + KBF = possibilistische Quantifikation.”

5.8.2 Existenzrelativierung und possibilistische Quantifikation

Wir nehmen im Folgenden an, dass ein *Existenzprädikat* $E(x)$ zur Verfügung steht, mit dem wir ausdrücken können, dass ein möglicher Gegenstand tatsächlich existiert. Mit einem solchen Existenzprädikat können wir die possibilistischen Quantoren in der Semantik konstanter Gegenstandsbereiche auf tatsächlich existierende Gegenstände einschränken (“Existenzrelativierung”), wodurch die bei variierenden Gegenstandsbereichen verwendeten aktualistischen Quantoren simuliert werden.

Definition 5.33 Sei E ein 1-stelliges ausgezeichnetes Relationszeichen für das Existenzprädikat $E(x)$. Wir definieren die *Existenzrelativierung* $[A]^E$ einer Formel A wie folgt:

Existenzrelativierung

- (i) $[A]^E := A$, falls A atomar und $A \neq E(x)$,
- (ii) $[*A]^E := *[A]^E$, für einstellige logische Konstanten $*$ $\in \{\neg, \Box, \Diamond\}$,
- (iii) $[A \circ B]^E := ([A]^E \circ [B]^E)$, für zweistellige logische Konstanten $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$,
- (iv) $[\forall x A(x)]^E := \forall x (E(x) \rightarrow [A(x)]^E)$,
- (v) $[\exists x A(x)]^E := \exists x (E(x) \wedge [A(x)]^E)$.

Theorem 5.34 Sei A eine geschlossene Formel, in der das Existenzprädikat $E(x)$ nicht vorkommt. Dann gilt $\mathfrak{M}_{\text{var}} \models A$ für alle Modelle $\mathfrak{M}_{\text{var}}$ genau dann, wenn $\mathfrak{M}_{\text{konst}} \models [A]^E$ für jedes Modell $\mathfrak{M}_{\text{konst}} = \langle W_k, R_k, M_k, \mathcal{I}_k \rangle$, in dem $\mathcal{I}_k(E, w) \neq \emptyset$ für alle $w \in W_k$.

Beweis. Siehe Fitting & Mendelsohn (1998, § 4.8) oder Piccha (2014, § 5.6). QED

Beispiel. Wir stellen einem Modell $\mathfrak{M}_{\text{var}}$ ein entsprechendes Modell $\mathfrak{M}_{\text{konst}}$ gegenüber:

$\mathfrak{M}_{\text{var}} = \langle W_v, R_v, M_v, \mathcal{I}_v \rangle$	$\mathfrak{M}_{\text{konst}} = \langle W_k, R_k, M_k, \mathcal{I}_k \rangle$
$W_v = \{w_1, w_2\}, R_v = \{\{w_1, w_2\}\},$ $M_v(w_1) = \{a\}, M_v(w_2) = \{a, b\},$ $\mathcal{I}_v(P, w_1) = \emptyset, \mathcal{I}_v(P, w_2) = \{b\}$	$W_k = W_v, R_k = R_v,$ $M_k = M(\mathfrak{M}_{\text{var}}) = \{a, b\}, \mathcal{I}_k = \mathcal{I}_v$ plus $\mathcal{I}_k(E, w_1) = \{a\}, \mathcal{I}_k(E, w_2) = \{a, b\}$
$\mathfrak{M}_{\text{var}}, w_1 \models \exists x \Diamond P(x) \rightarrow \Diamond \exists x P(x)$	$\mathfrak{M}_{\text{konst}}, w_1 \models [\exists x \Diamond P(x) \rightarrow \Diamond \exists x P(x)]^E =$ $[\exists x \Diamond P(x) \rightarrow \Diamond \exists x P(x)]^E =$ $\exists x (E(x) \wedge \Diamond P(x)) \rightarrow \Diamond \exists x (E(x) \wedge P(x))$

Entsprechend kann für jedes Modell $\mathfrak{M}_{\text{var}}$ ein Modell $\mathfrak{M}_{\text{konst}}$ konstruiert werden. Mittels Existenzrelativierung können also anstelle von Modellen mit variierendem Gegenstandsbereich (aktualistische Quantifikation) Modelle mit konstantem Gegenstandsbereich (possibilistische Quantifikation) verwendet werden. Salopp formuliert:

“Possibilistische Quantifikation + Existenzrelativierung = aktualistische Quantifikation.”

5.9 Designatoren

Bisher haben wir uns im Rahmen der modalen Quantorenlogik auf Sprachen \mathcal{L} ohne Individuenkonstanten k beschränkt. Jetzt lassen wir auch Konstanten zu, für die für Rahmen $\mathfrak{F} = \langle W, R_E, M \rangle$ für variierende Gegenstandsbereiche und Sprachen \mathcal{L} eine *nicht-starre Interpretation* \mathcal{I} angegeben werden kann wie folgt:

$$\mathcal{I}(k, w) \in M(\mathfrak{F}) \text{ für } w \in W \text{ und Konstanten } k \in \mathcal{L}.$$

*nicht-starre
Interpretation*

Konstanten k können also in w auch Gegenstände bezeichnen, die in $M(w)$ nicht vorkommen. Die bezeichneten Gegenstände müssen nur in $M(\mathfrak{F})$, d. h. in mindestens einer Welt, vorkommen. Die nicht-starre Interpretation \mathcal{I} ordnet dabei aber jeder Konstante $k \in \mathcal{L}$ für jede Welt $w \in W$ einen Gegenstand in $M(\mathfrak{F})$ zu.

Es ist $\mathfrak{M} = \langle W, R_E, M, \mathcal{I} \rangle$ ein *nicht-starres Modell*, falls $\mathfrak{F} = \langle W, R_E, M \rangle$ ein Rahmen für variierende Gegenstandsbereiche und \mathcal{I} eine nicht-starre Interpretation auf \mathfrak{F} ist.

nicht-starres Modell

Für solche Modelle $\mathfrak{M} = \langle W, R_E, M, \mathcal{I} \rangle$, Variablenbelegungen v in \mathfrak{M} und Terme t (d. h. für Variablen x oder Konstanten k) sind *Termebelegungen* nun wie folgt definiert:

Termebelegung

$$\llbracket t, w \rrbracket_v^{\mathfrak{M}} := \begin{cases} v(x) & \text{falls } t = x, \\ \mathcal{I}(k, w) & \text{falls } t = k. \end{cases}$$

Man beachte, dass $\llbracket t, w \rrbracket_v^{\mathfrak{M}}$ im Fall $t = x$ unabhängig von der Welt w ist, da $v(x)$ nicht von w abhängt. *Gültigkeit atomarer Formeln* $R(t_1, \dots, t_n)$ in \mathfrak{M} in w unter v ist dann durch

*Gültigkeit in \mathfrak{M} in w
unter v*

$$\mathfrak{M}, w \models_v R(t_1, \dots, t_n) : \iff \langle \llbracket t_1, w \rrbracket_v^{\mathfrak{M}}, \dots, \llbracket t_n, w \rrbracket_v^{\mathfrak{M}} \rangle \in \mathcal{I}(R, w)$$

definiert. Zusätzlich verwenden wir atomare Formeln der Form $(t_1 \doteq t_2)$, wobei *Gleichheit* “ \doteq ” als logische Konstante in der Bedeutung

Gleichheit

$$\mathfrak{M}, w \models_v (t_1 \doteq t_2) : \iff \llbracket t_1, w \rrbracket_v^{\mathfrak{M}} = \llbracket t_2, w \rrbracket_v^{\mathfrak{M}}$$

verwendet wird. Für die übrigen logischen Konstanten gilt die Semantik für variierende Gegenstandsbereiche.

Man könnte auch zulassen, dass gewisse Konstanten in bestimmten Welten uninterpretiert bleiben, also nicht jeder Konstante für jede Welt ein Gegenstand in $M(\mathfrak{F})$ zugeordnet werden muss. In diesem Fall ist $\mathcal{I}(k, w)$ eine partielle Funktion, da es Argumente k, w gibt, für die $\mathcal{I}(k, w)$ undefiniert ist. Es stellt sich dann die Frage, was für Formeln mit solchen Konstanten in jenen Welten gilt, in denen diese Konstanten überhaupt keinen Gegenstand bezeichnen.

Ist z. B. $\mathcal{I}(k, w) = \text{undefiniert}$, dann ist für die Formel $P(k)$ unbestimmt, ob $\llbracket k, w \rrbracket_v^{\mathfrak{M}} \in \mathcal{I}(P, w)$. Folglich ist auch $\mathfrak{M}, w \models_v P(k)$ unbestimmt. Dies verletzt das Bivalenzprinzip der klassischen Logik, da es nun neben gültigen (d. h. wahren) und ungültigen (d. h. falschen) Aussagen auch Aussagen gibt, die weder wahr noch falsch sind. Gibt man das Bivalenzprinzip auf, so führt dies hier zu einer dreiwertigen Logik mit einem dritten Wahrheitswert “unbestimmt”. Möchte man hingegen am Bivalenzprinzip festhalten, so legt man z. B. fest, dass Aussagen wie $P(k)$ im Fall $\mathcal{I}(k, w) = \text{undefiniert}$ in der Welt w nicht gelten, also in jenen Welten, in denen k überhaupt keinen Gegenstand bezeichnet, falsch sind.

Ein solcher Ansatz kann für definite Kennzeichnungen (engl. definite descriptions) wie “der erste Mensch auf dem Mars” oder “der gegenwärtige König von Frankreich”

verwendet werden, welche dann als Konstanten behandelt werden können, die in gewissen möglichen Welten keinen Gegenstand bezeichnen.

Im Folgenden betrachten wir jedoch ausschließlich totale nicht-starre Interpretationen \mathcal{I} , die jeder Konstante $k \in \mathcal{L}$ für jede Welt $w \in \mathcal{W}$ einen Gegenstand in $M(\mathfrak{F})$ zuordnen. Interpretationen dieser Art lassen die zwei folgenden uns hier interessierenden Fälle zu:

- (i) Eine Konstante kann in verschiedenen möglichen Welten verschiedene Gegenstände bezeichnen.

(Zum Beispiel kann der Designator “die hellste Supernova” zu verschiedenen Zeiten verschiedene Sterne bezeichnen.)

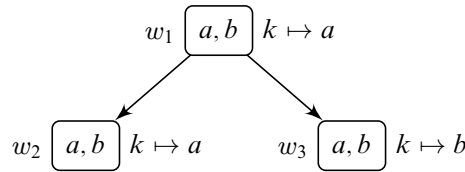
- (ii) Eine Konstante kann in einer möglichen Welt einen Gegenstand bezeichnen, den es in dieser Welt nicht gibt.

(Das ist z. B. für den Designator “Pegasus” in unserer Welt der Fall.)

Da Konstanten in verschiedenen Welten verschiedene Gegenstände bezeichnen können, sind Konstanten sogenannte *nicht-starre Designatoren*.

*nicht-starre
Designator*

Beispiel. Wir betrachten das Modell $\mathfrak{M} = \langle W, R_E, M, \mathcal{I} \rangle$ mit $W = \{w_1, w_2, w_3\}$, $R_E = \{\langle w_1, w_2 \rangle, \langle w_1, w_3 \rangle\}$ und $M(w_1) = M(w_2) = M(w_3) = \{a, b\}$. Die Konstante k sei ein nicht-starre Designator, der in w_1 und w_2 den Gegenstand a und in w_3 den Gegenstand b bezeichne; d. h. $\mathcal{I}(k, w_1) = \mathcal{I}(k, w_2) = \{a\}$ und $\mathcal{I}(k, w_3) = \{b\}$. Als Diagramm:



- Es ist $\mathfrak{M}, w_1 \models_v \forall x \exists y \Box(x \doteq y)$ für beliebige Variablenbelegungen v , denn es gibt für jede x -Variante v' von v in w_1 eine y -Variante v'' von v' in w_1 , so dass $\mathfrak{M}, w_1 \models_{v''} \Box(x \doteq y)$, nämlich $v'' := v'[y \mapsto v'(x)]$. Dann ist wegen $v''(x) = v''(y)$ sowohl $\mathfrak{M}, w_2 \models_{v''} (x \doteq y)$ als auch $\mathfrak{M}, w_3 \models_{v''} (x \doteq y)$ der Fall.

- Es ist aber $\mathfrak{M}, w_1 \not\models_v \exists y \Box(k \doteq y)$, denn für die y -Variante $v' = v[y \mapsto a]$ in w_1 gilt zwar $\mathfrak{M}, w_2 \models_{v'} (k \doteq y)$, aber nicht $\mathfrak{M}, w_3 \models_{v'} (k \doteq y)$; und für die y -Variante $v' = v[y \mapsto b]$ in w_1 gilt $\mathfrak{M}, w_3 \models_{v'} (k \doteq y)$, aber nicht $\mathfrak{M}, w_2 \models_{v'} (k \doteq y)$. Es gibt also keine y -Variante v' von v in w_1 , für die in allen von w_1 aus erreichbaren Welten $(k \doteq y)$ gilt, d. h. für keine Variablenbelegung v' in w_1 gilt $\mathfrak{M}, w_1 \models_{v'} \Box(k \doteq y)$. Also $\mathfrak{M}, w_1 \not\models_v \exists y \Box(k \doteq y)$.

Bemerkungen. (i) Selbst für konstante Gegenstandsbereiche gilt $\forall x A(x) \rightarrow A(k)$ bei Verwendung nicht-starrer Designatoren nicht länger für beliebige (modallogische) Formeln A , während in der klassischen (nicht-modalen) Quantorenlogik $\models \forall x A(x) \rightarrow A(k)$ gilt.

Im Beispiel ist $\mathfrak{M}, w_1 \not\models_v \forall x \exists y \Box(x \doteq y) \rightarrow \exists y \Box(k \doteq y)$. Zur Verdeutlichung setzen wir $A(x) := \exists y \Box(x \doteq y)$. Dann ist

$$\forall x \exists y \Box(x \doteq y) \equiv \forall x A(x) \quad \text{und} \quad \exists y \Box(k \doteq y) \equiv A(k)$$

Somit gilt $\not\models \forall x A(x) \rightarrow A(k)$.

- (ii) Bezeichnet eine Konstante k in allen möglichen Welten denselben Gegenstand, so ist k ein sogenannter *starrer Designator*. Für starre Designatoren k gilt zumindest in der Modallogik für konstante Gegenstandsbereiche ebenfalls $\models \forall x B(x) \rightarrow B(k)$, für beliebige Formeln B . Für variierende Gegenstandsbereiche ist dies nicht der Fall: Im Modell \mathfrak{M}

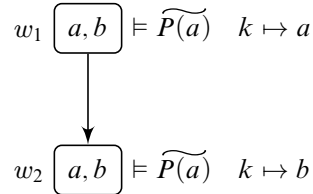
$$w_1 \boxed{a} \models \widetilde{P(a)} \quad k \mapsto b$$

$$w_2 \boxed{b} \quad k \mapsto b$$

ist zwar k ein starrer Designator, es ist jedoch $\mathfrak{M}, w_1 \not\models \forall x P(x) \rightarrow P(k)$, da $\mathfrak{M}, w_1 \models \forall x P(x)$ und $\mathfrak{M}, w_1 \not\models P(k)$.

Im vorherigen Beispiel haben wir uns beim Nachweis von $\mathfrak{M}, w_1 \not\models_v \exists y \Box(k \doteq y)$ auf die Interpretationen von k in den beiden von w_1 aus erreichbaren Welten w_2 und w_3 bezogen. Wir haben also zunächst den Modaloperator \Box und nachfolgend die Bedeutungen von k berücksichtigt. Umgekehrt hätten wir auch zunächst die Interpretation von k in w_1 zugrunde legen können, um dann nachfolgend für diese Interpretation von k die für den Modaloperator relevanten Welten w_1 und w_2 zu betrachten; in diesem Fall würde $\mathfrak{M}, w_1 \models_v \exists y \Box(k \doteq y)$ gelten. Das folgende Beispiel verdeutlicht diese Zweideutigkeit, die bei Verwendung von nicht-starren Designatoren in Gegenwart von Modaloperatoren vorliegt.

Beispiel. Sei $\mathfrak{M} = \langle W, R_E, M, \mathcal{I} \rangle$ ein nicht-starrs Modell mit $W = \{w_1, w_2\}$, $R_E = \{\langle w_1, w_2 \rangle\}$, $M(w_1) = M(w_2) = \{a, b\}$ und $\mathcal{I}(P, w_1) = \mathcal{I}(P, w_2) = \{a\}$; für die Konstante k gelte $\mathcal{I}(k, w_1) = \{a\}$ und $\mathcal{I}(k, w_2) = \{b\}$, d. h. k bezeichnet in w_1 den Gegenstand a und in w_2 den Gegenstand b , ist also ein nicht-starrer Designator. Diagrammatisch:



Sei v eine beliebige Variablenbelegung. Gilt $\mathfrak{M}, w_1 \models_v \Diamond P(k)$?

Es bestehen zwei Möglichkeiten:

- (i) Da wir nach der Gültigkeit von $\Diamond P(k)$ in der Welt w_1 fragen, und k in w_1 den Gegenstand a bezeichnet, könnten wir $\mathfrak{M}, w_1 \models_v \Diamond P(k)$ als $\mathfrak{M}, w_1 \models_{v'} \Diamond P(x)$ lesen, wobei $v' = v[x \mapsto a]$. Es ist

$$\mathfrak{M}, w_1 \models_{v'} \Diamond P(x) \iff \mathfrak{M}, w_2 \models_{v'} P(x)$$

da $w_1 R_E w_2$. Die rechte Seite gilt wegen $v'(x) = a \in \mathcal{I}(P, w_2)$. Also gilt auch $\mathfrak{M}, w_1 \models_v \Diamond P(k)$.

- (ii) Oder wir lesen $\mathfrak{M}, w_1 \models_v \Diamond P(k)$ als $\mathfrak{M}, w_2 \models_v P(k)$, berücksichtigen also zunächst den Modaloperator \Diamond . In dieser Lesart fragen wir nach der Gültigkeit von $P(k)$ in der Welt w_2 . Dann sollte

$$\mathfrak{M}, w_2 \models_v P(k) \iff \mathfrak{M}, w_2 \models_{v'} P(x)$$

für $v' = v[x \mapsto b]$ gelten, da k in der Welt w_2 den Gegenstand b bezeichnet. Die rechte Seite gilt jedoch wegen $v'(x) = b \notin \mathcal{I}(P, w_2)$ nicht, und somit $\mathfrak{M}, w_1 \not\models_v \diamond P(k)$.

Um die beiden Lesarten (i) und (ii) auch formal unterscheiden zu können, verwenden wir das Mittel der Prädikatabstraktion.

Definition 5.35 Wir erweitern die Definition modaler quantorenlogischer Formeln:

- (i) Ist $A(x)$ eine Formel und x eine Variable, dann ist $\langle \lambda x. A(x) \rangle$ eine *Prädikatabstraktion*. Hierbei ist λx ein variablenbindender Operator: die freien Vorkommen von x in $A(x)$ sind in $\langle \lambda x. A(x) \rangle$ gebunden; freie Vorkommen anderer Variablen in $A(x)$ bleiben frei. Die Variable x in λx ist weder frei noch gebunden. *Prädikatabstraktion*
- (ii) Ist $\langle \lambda x. A(x) \rangle$ eine Prädikatabstraktion und t ein Term, dann ist $\langle \lambda x. A(x) \rangle(t)$ eine *Formel*. Die freien Variablenvorkommen von $\langle \lambda x. A(x) \rangle(t)$ sind die von $\langle \lambda x. A(x) \rangle$ und t . *Formel*

Die Formel $\langle \lambda x. A(x) \rangle(t)$ kann man lesen als: “der von t bezeichnete Gegenstand hat die Eigenschaft $\langle \lambda x. A(x) \rangle$ ”.

Wir erläutern die Notation anhand einiger Beispiele:

- $\langle \lambda x. P(x) \rangle$ steht für “die Eigenschaft, P zu sein”.
- $\langle \lambda x. \neg P(x) \wedge Q(x) \rangle$ steht für “die Eigenschaft, nicht P aber Q zu sein”.
- $\langle \lambda x. \Box P(x) \rangle$ steht für “die Eigenschaft, notwendig P zu sein”.
- $\langle \lambda x. \Box P(x) \rangle(k)$ steht für die Aussage “Die Eigenschaft, notwendig P zu sein, trifft auf k zu”.

Für Aussagen der Form $\Box P(k)$ oder $\diamond P(k)$ kann mittels Prädikatabstraktion zwischen *de dicto* und *de re* unterschieden werden. Wir betrachten den Fall $\Box P(k)$:

- *de dicto*: $\Box \langle \lambda x. P(x) \rangle(k)$
 (“Es ist notwendig, dass die Eigenschaft, P zu sein, auf k zutrifft” bzw. “Es ist notwendig, dass k die Eigenschaft P hat”)
- *de re*: $\langle \lambda x. \Box P(x) \rangle(k)$
 (“Die Eigenschaft, notwendig P zu sein, trifft auf k zu” bzw. “ k ist derart, dass es notwendigerweise P ist”).

Definition 5.36 Sei \mathfrak{M} ein nicht-starres Modell $\langle W, R_E, M, \mathcal{I} \rangle$, w eine Welt in W und v eine Variablenbelegung. Wir erweitern die Definition der Relation $\mathfrak{M}, w \models_v A$ (“ A gilt im Modell \mathfrak{M} in der Welt $w \in W$ unter der Variablenbelegung v in \mathfrak{M} ”) durch folgende Klausel: *A gilt in \mathfrak{M} in Welt w unter v*

$$\mathfrak{M}, w \models_v \langle \lambda x. A(x) \rangle(t) \iff \mathfrak{M}, w \models_{v'} A(x), \text{ wobei } v' = v[x \mapsto \llbracket t, w \rrbracket_v^{\mathfrak{M}}]$$

Bemerkung. $\mathfrak{M}, w \models_v \langle \lambda x. A(x) \rangle(t)$ gilt also genau dann, wenn $\mathfrak{M}, w \models_{v'} A(x)$ für die x -Variante v' von v mit der Eigenschaft

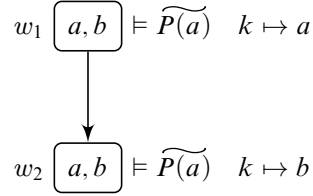
$$v'(x) = \begin{cases} v(y) & \text{falls } t = y, \\ \mathcal{I}(k, w) & \text{falls } t = k \end{cases}$$

gilt, d. h. falls A in w auf den in w von t bezeichneten Gegenstand zutrifft.

Beispiel. Nun können wir die Frage, ob $\mathfrak{M}, w_1 \models_v \diamond P(k)$ für eine beliebige Variablenbelegung v gilt, präzisieren, indem wir die beiden möglichen Lesarten von $\diamond P(k)$ formal unterscheiden:

- (i) $\langle \lambda x. \diamond P(x) \rangle(k)$ (“Die Eigenschaft, möglicherweise P zu sein, trifft auf k zu”),
- (ii) $\diamond \langle \lambda x. P(x) \rangle(k)$ (“Es ist möglich, dass die Eigenschaft P zu sein, auf k zutrifft”).

Wir betrachten wieder das Modell \mathfrak{M} aus dem letzten Beispiel:



- (i) Gilt $\mathfrak{M}, w_1 \models_v \langle \lambda x. \diamond P(x) \rangle(k)$?

Es gilt $\mathfrak{M}, w_1 \models_v \langle \lambda x. \diamond P(x) \rangle(k)$ genau dann, wenn $\mathfrak{M}, w_1 \models_{v'} \diamond P(x)$ für $v'(x) = \mathcal{I}(k, w_1) = a$. Da w_1 nur w_2 sieht, ist dies genau dann der Fall, wenn $\mathfrak{M}, w_2 \models_{v'} P(x)$. Wegen $v'(x) = a \in \mathcal{I}(P, w_2)$ gilt $\mathfrak{M}, w_2 \models_{v'} P(x)$. Also gilt auch $\mathfrak{M}, w_1 \models_v \langle \lambda x. \diamond P(x) \rangle(k)$.

- (ii) Gilt $\mathfrak{M}, w_1 \models_v \diamond \langle \lambda x. P(x) \rangle(k)$?

Es gilt $\mathfrak{M}, w_1 \models_v \diamond \langle \lambda x. P(x) \rangle(k)$ genau dann, wenn $\mathfrak{M}, w_2 \models_{v'} \langle \lambda x. P(x) \rangle(k)$. Letzteres gilt genau dann, wenn $\mathfrak{M}, w_2 \models_{v'} P(x)$ für $v'(x) = \mathcal{I}(k, w_2) = b$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $v'(x) \in \mathcal{I}(P, w_2)$. Da $v'(x) = b \notin \mathcal{I}(P, w_2)$, ist $\mathfrak{M}, w_2 \not\models_{v'} P(x)$, also $\mathfrak{M}, w_2 \not\models_{v'} \langle \lambda x. P(x) \rangle(k)$ und somit $\mathfrak{M}, w_1 \not\models_v \diamond \langle \lambda x. P(x) \rangle(k)$.

Das Beispiel zeigt $\not\models \langle \lambda x. \diamond P(x) \rangle(k) \rightarrow \diamond \langle \lambda x. P(x) \rangle(k)$. Auch die umgekehrte Richtung ist nicht allgemeingültig, d. h. $\not\models \diamond \langle \lambda x. P(x) \rangle(k) \rightarrow \langle \lambda x. \diamond P(x) \rangle(k)$.

Anhang A Verwendung von Annahmen in Hilberttypkalkülen

Gemäß Definition 4.20

$$\Gamma \vdash_S A \iff \vdash_S \mathbb{M} \Gamma' \rightarrow A$$

beruht der Begriff der Ableitbarkeit aus Annahmen ($\Gamma \vdash_S A$) für Hilberttypkalküle für Standardmodallogiken S auf der Ableitbarkeit von Implikationen ($\vdash_S \mathbb{M} \Gamma' \rightarrow A$). Dieser Begriff ermöglicht es uns, über Ableitbarkeit aus Annahmen zu sprechen, ohne die Verwendung von Annahmen in Ableitungen tatsächlich zulassen zu müssen. Dadurch vermeiden wir gewisse Probleme, die sich durch die Nezessitationsregel

$$\frac{A}{\Box A}$$

ergeben würden; die Prämisse A dieser Regel darf nämlich nicht von beliebigen Annahmen abhängen.

Im rein aussagenlogischen Fall ist die Verwendung von Annahmen in Ableitungen hingegen unproblematisch. Wir verdeutlichen dies für den wie folgt gegebenen aussagenlogischen Hilberttypkalkül:

Definition A.1 Der *aussagenlogische Hilberttypkalkül* ist gegeben durch:

*aussagenlogischer
Hilberttypkalkül*

Axiomenschemata:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \\ (A \wedge B) \rightarrow A \\ (A \wedge B) \rightarrow B \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow (A \vee B) \\ B \rightarrow (A \vee B) \\ (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow (B \rightarrow A) \\ (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A) \\ \neg \neg A \rightarrow A \end{array} \right.$$

Regel: $\frac{A \rightarrow B \quad A}{B}$ (Modus Ponens)

Annahmen dürfen wie Axiome oder Formeln, die Konklusion von Modus Ponens sind, in einer Ableitung hinzugefügt werden. Alle nachfolgenden Formeln hängen dann von diesen Annahmen ab. Wir schreiben $\Gamma \vdash C$ für die aussagenlogische Ableitbarkeit einer Formel C aus einer Menge von Annahmen Γ . Das folgende Deduktionstheorem wird es uns gestatten, die Abhängigkeit einer Formel B von einer Annahme A durch Einführung der Implikation $A \rightarrow B$ aufzuheben.

Theorem A.2 (Deduktionstheorem) Wenn $\Gamma, A \vdash B$, dann $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

Beweis. Sei eine Ableitung von B aus $\Gamma \cup \{A\}$ gegeben. Wir führen Induktion über dem Aufbau dieser Ableitung.

(i) $B \in \Gamma$:

- k.* B Annahme
- l.* $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ Axiom
- m.* $A \rightarrow B$ Modus Ponens auf *k* und *m*

(ii) $B \equiv A$:

- $k.$ $A \rightarrow \underbrace{(A \rightarrow A)}_B$ Axiom
- $l.$ $(A \rightarrow \underbrace{(A \rightarrow A)}_B) \rightarrow ((A \rightarrow \underbrace{((A \rightarrow A) \rightarrow A)}_C) \rightarrow (A \rightarrow \underbrace{A)}_C))$ Axiom
- $m.$ $(A \rightarrow \underbrace{((A \rightarrow A) \rightarrow A)}_B) \rightarrow (A \rightarrow A)$ MP auf k, l
- $n.$ $A \rightarrow \underbrace{((A \rightarrow A) \rightarrow A)}_B$ Axiom
- $o.$ $A \rightarrow A$ MP auf m, n

(Die unter den Formeln in Zeile k, l und n notierten Buchstaben B und C beziehen sich auf die in Definition A.1 angegebenen Axiomenschemata; d. h. B und C zeigen die vorgenommenen Substitutionen an.)

(iii) B ist ein Axiom:

- $k.$ B Axiom
- $l.$ $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ Axiom
- $m.$ $A \rightarrow B$ MP auf k, l

(iv) Im letzten Schritt wurde Modus Ponens angewendet:

- $k.$ C Formel in Ableitung
- $l.$ $C \rightarrow B$ Formel in Ableitung
- $m.$ B Modus Ponens auf k und l

Für die unter den Annahmen $\Gamma \cup \{A\}$ abgeleiteten Prämissen C und $C \rightarrow B$ gilt dann aufgrund der Induktionsannahme $\Gamma \vdash A \rightarrow C$ bzw. $\Gamma \vdash A \rightarrow (C \rightarrow B)$. Damit gibt es eine Ableitung, die $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ zeigt:

- $n.$ $A \rightarrow C$ nach Induktionsannahme
- $o.$ $A \rightarrow (C \rightarrow B)$ nach Induktionsannahme
- $p.$ $(A \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B))$ Axiom
- $q.$ $(A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$ MP auf n, p
- $r.$ $A \rightarrow B$ MP auf o, q

Anschaulich:

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma \cup \{A\} \\ \vdots \\ k. C \\ \vdots \\ l. C \rightarrow B \\ \vdots \\ m. B \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \Gamma \\ \vdots \\ n. A \rightarrow C \\ \vdots \\ o. A \rightarrow (C \rightarrow B) \\ p. (A \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)) \text{ Axiom} \\ q. (A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B) \text{ MP auf } n, p \\ r. A \rightarrow B \text{ MP auf } o, q \end{array} \right\} \text{ nach Induktionsannahme}$$

QED

Bemerkung. Die Umkehrung des Deduktionstheorems, d. h. $\Gamma \vdash A \rightarrow B \implies \Gamma, A \vdash B$, gilt mit Modus Ponens unmittelbar.

Beispiel. Wir geben eine Ableitung von $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C)))$ in dem in Definition A.1 angegebenen Kalkül an. Wir verwenden also nicht beliebige aussagenlogische Tautologien, sondern beschränken uns auf die angegebenen Axiome (andernfalls dürften wir die abzuleitende Formel einfach als Axiom hinschreiben). Zusätzlich verwenden wir das Deduktionstheorem.

1.	$C \rightarrow (B \rightarrow (B \wedge C))$	Axiom
2.	$A \rightarrow B$	Annahme
3.	$A \rightarrow C$	Annahme
4.	A	Annahme
5.	C	MP auf 3, 4
6.	$B \rightarrow (B \wedge C)$	MP auf 1, 5
7.	B	MP auf 2, 4
8.	$B \wedge C$	MP auf 6, 7
9.	$A \rightarrow (B \wedge C)$	Deduktionstheorem auf 4 und 8
10.	$(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C))$	DT auf 3, 9
11.	$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C)))$	DT auf 2, 10

Das Deduktionstheorem kann jedoch *nicht* ohne Weiteres auf die modallogischen Hilberttypkalküle für Standardmodallogiken S ausgedehnt werden. Es muss ausgeschlossen werden, dass die Prämisse A der Nezeptionsregel $\frac{A}{\Box A}$ von beliebigen Annahmen abhängen kann; andernfalls könnte z. B. $A \vdash_S \Box A$ gezeigt werden, was wegen $A \not\vdash_S \Box A$ die Inkorrektheit des jeweiligen Kalküls S bedeuten würde. Man muss die Verwendung von Annahmen also entweder geeignet einschränken (siehe z. B. [Fitting & Mendelsohn, 1998, § 3.3](#)), oder man verzichtet ganz auf die Verwendung von Annahmen in Ableitungen. Im letzteren Fall wird Ableitbarkeit von A aus Annahmen Γ in einer Logik S im Sinne von Definition 4.20 verstanden.

Anhang B Korrektheit und Vollständigkeit quantorenlogischer Tableaux

Literatur

- P. Schroeder-Heister (2008), *Einführung in die Logik*, Vorlesungsskript, Universität Tübingen. <http://www.uni-tuebingen.de/en/30440>.
- R. M. Smullyan (1995), *First-Order Logic*. New York: Dover Publications.
- R. M. Smullyan (2009), *Logical Labyrinths*. Wellesley, MA: A K Peters.

Wir sprechen im Folgenden von α -, β -, γ - und δ -Formeln, um uns auf die Prämissen von α -, β -, γ - und δ -Regeln zu beziehen. Mit α_1 und α_2 beziehen wir uns auf die Konklusionen von α -Regeln, mit β_1 und β_2 auf die Konklusionen von β -Regeln. Wir schreiben $\gamma(a)$, um die Konklusion einer γ -Regel mit Konstante (bzw. Parameter) a zu bezeichnen; entsprechend bezeichnet $\delta(a)$ die Konklusion einer δ -Regel mit Parameter a .

Wir verzichten auf die Notation von Signaturen σ , da diese im hier betrachteten rein quantorenlogischen Fall keine Rolle spielen.

Aussagenlogische Regeln:

$$\alpha\text{-Regeln} \left\{ \begin{array}{llll} (\wedge) \frac{A \wedge B}{A} & (\neg\vee) \frac{\neg(A \vee B)}{\neg A} & (\neg\rightarrow) \frac{\neg(A \rightarrow B)}{A} & (\neg) \frac{\neg\neg A}{A} \\ & & & \neg B \end{array} \right.$$

$$\beta\text{-Regeln} \left\{ \begin{array}{lll} (\neg\wedge) \frac{\neg(A \wedge B)}{\neg A \mid \neg B} & (\vee) \frac{A \vee B}{A \mid B} & (\rightarrow) \frac{A \rightarrow B}{\neg A \mid B} \end{array} \right.$$

Quantorenlogische Regeln:

- (i) Für eine beliebige Konstante a (einschließlich Parameter):

$$\gamma\text{-Regeln} \left\{ \begin{array}{ll} (\forall) \frac{\forall x A(x)}{A(a)} & (\neg\exists) \frac{\neg\exists x A(x)}{\neg A(a)} \end{array} \right.$$

- (ii) Für einen Parameter a , der im Zweig noch nicht vorkommt:

$$\delta\text{-Regeln} \left\{ \begin{array}{ll} (\exists) \frac{\exists x A(x)}{A(a)} & (\neg\forall) \frac{\neg\forall x A(x)}{\neg A(a)} \end{array} \right.$$

Bemerkungen. (i) Wir betrachten ausschließlich Tableaux für geschlossene Formeln. Für allgemeingültige offene Formeln, wie z. B. $P(x) \rightarrow \exists y P(y)$, kann es somit keinen Tableaubeweis geben. Wir werden uns deshalb bei den wesentlichen Resultaten auf geschlossene Formeln beschränken.

Alternativ könnte man Tableaux für offene Formeln A mit freien Variablen x_1, \dots, x_n als Tableaux definieren, die mit der geschlossenen Formel $\neg(\forall x_1 \dots \forall x_n A)$ beginnen.

- (ii) In Bezug auf Tableaux und Zweige in Tableaux verwenden wir die Begriffe *nicht-geschlossen* und *offen* synonym. In der Literatur werden mitunter nur *endliche* nicht-geschlossene Zweige, bzw. Tableaux, als offen bezeichnet. Um auch mit diesen Darstellungen konform zu sein, sprechen wir im Folgenden statt von offenen Zweigen bzw. Tableaux stets von nicht-geschlossenen Zweigen bzw. Tableaux.

B.1 Korrektheit

Wir wollen für geschlossene Formeln A beweisen: Wenn es einen Tableaubeweis für A gibt, dann ist A allgemeingültig.

Durch die Anwendung von δ -Regeln werden in Tableaux neue Parameter eingeführt. Bei Modellen werden wir deshalb entsprechende Erweiterungen zu betrachten haben:

Definition B.1 \mathfrak{M}' ist eine *Erweiterung von \mathfrak{M}* , wenn in \mathfrak{M}' Parameter interpretiert werden, die in \mathfrak{M} nicht interpretiert werden, ansonsten aber mit \mathfrak{M} identisch ist. *Erweiterung von \mathfrak{M}*

Es gilt: $\mathfrak{M} \models A \implies \mathfrak{M}' \models A$ und $\mathfrak{M} \not\models A \implies \mathfrak{M}' \not\models A$. (A kann keine der nur in \mathfrak{M}' interpretierten Parameter enthalten, da die Gültigkeit von A in \mathfrak{M} dann nicht definiert wäre.)

Lemma B.2 Die Tableauregeln erfüllen die folgenden Eigenschaften, für Modelle \mathfrak{M} und Mengen geschlossener Formeln S :

- (i) Wenn $\mathfrak{M} \models S \cup \{\alpha\}$, dann $\mathfrak{M} \models S \cup \{\alpha_1\}$ und $\mathfrak{M} \models S \cup \{\alpha_2\}$, sofern $\alpha \not\equiv \neg\neg A$.
Falls $\alpha \equiv \neg\neg A$, dann nur $\mathfrak{M} \models S \cup \{\alpha_1\}$, wobei $\alpha_1 \equiv A$.
- (ii) Wenn $\mathfrak{M} \models S \cup \{\beta\}$, dann $\mathfrak{M} \models S \cup \{\beta_1\}$ oder $\mathfrak{M} \models S \cup \{\beta_2\}$.
- (iii) Wenn $\mathfrak{M} \models S \cup \{\gamma\}$, dann gibt es eine Erweiterung \mathfrak{M}' von \mathfrak{M} , so dass $\mathfrak{M}' \models S \cup \{\gamma(a)\}$ für jede Konstante (einschließlich Parameter) a gilt.
- (iv) Wenn $\mathfrak{M} \models S \cup \{\delta\}$, dann gibt es eine Erweiterung \mathfrak{M}' von \mathfrak{M} , so dass $\mathfrak{M}' \models S \cup \{\delta(a)\}$ für jeden Parameter a gilt, der weder in δ noch in Formeln in S vorkommt.

Beweis. Durch Inspektion der α - und β -Regeln vergewissert man sich, dass (i) und (ii) gilt.

(iii) Falls a in \mathfrak{M} nicht interpretiert wird, interpretieren wir a in einer Erweiterung \mathfrak{M}' beliebig.

(iv) Interpretiere a in \mathfrak{M}' durch einen Gegenstand m , für den $\delta(a)$ in \mathfrak{M} gilt. QED

Theorem B.3 (Korrektheit) Sei A eine geschlossene Formel. Wenn es einen Tableaubeweis für A gibt, dann gilt $\models A$.

Beweis. Angenommen, $\not\models A$. Dann muss es ein Gegenmodell \mathfrak{M} für A geben, d. h. $\mathfrak{M} \not\models A$, und somit $\mathfrak{M} \models \neg A$. Es ist $\neg A$ die oberste Formel des Tableaus. Da diese Formel gilt, kann mit Lemma B.2 eine Erweiterung \mathfrak{M}' von \mathfrak{M} konstruiert werden, in der alle geschlossenen Formeln von mindestens einem Zweig des Tableaus gelten. Da dieser Zweig keinen Widerspruch enthält, kann das Tableau für A nicht geschlossen sein. QED

Bemerkung. Die Einschränkung auf geschlossene Formeln A ist nötig, da für offene Formeln zwar $\mathfrak{M} \models \neg A \implies \mathfrak{M} \not\models A$ gilt, aber nicht die im Beweis verwendete Umkehrung $\mathfrak{M} \not\models A \implies \mathfrak{M} \models \neg A$.

B.2 Vollständigkeit

Nun wollen wir für geschlossene Formeln A beweisen: Wenn A allgemeingültig ist, dann gibt es einen Tableaubeweis für A .

Dazu betrachten wir systematische Tableaux für A . Diese haben die Eigenschaft: Wenn

es ein Gegenmodell für die Formel $\neg A$ (in der ersten Zeile des Tableaus) gibt, dann ist das Tableau geschlossen. Für die bisher betrachteten nicht-systematischen Tableaux gilt dies nicht:

Beispiel. Wir betrachten die allgemeingültige Formel $\exists y(P(y) \rightarrow \forall xP(x))$.

Für deren Negation $\neg\exists y(P(y) \rightarrow \forall xP(x))$ gibt es ein Gegenmodell, aber das folgende Tableau für $\exists y(P(y) \rightarrow \forall xP(x))$ ist nicht geschlossen:

1. $\neg\exists y(P(y) \rightarrow \forall xP(x))$
2. $\neg(P(a) \rightarrow \forall xP(x))$ ($\neg\exists, 1$)
3. $\neg(P(a) \rightarrow \forall xP(x))$ ($\neg\exists, 1$)
4. $\neg(P(a) \rightarrow \forall xP(x))$ ($\neg\exists, 1$)
- ⋮

Die wiederholte Anwendung der γ -Regel ($\neg\exists$) liefert einen unendlichen Zweig.

Für $\exists y(P(y) \rightarrow \forall xP(x))$ kann jedoch auch ein geschlossenes Tableau angegeben werden:

1. $\neg\exists y(P(y) \rightarrow \forall xP(x))$
2. $\neg(P(a) \rightarrow \forall xP(x))$ ($\neg\exists, 1$)
3. $P(a)$ ($\neg\rightarrow, 2$)
4. $\neg\forall xP(x)$ ($\neg\rightarrow, 2$)
5. $\neg P(b)$ ($\neg\forall, 4$)
6. $\neg(P(b) \rightarrow \forall xP(x))$ ($\neg\exists, 1$)
7. $P(b)$ ($\neg\rightarrow, 6$)
8. $\frac{\neg\forall xP(x)}{5 \times 7}$ ($\neg\rightarrow, 6$)

Hier ist die zweimalige Anwendung der γ -Regel ($\neg\exists$) auf Zeile 1 in den Zeilen 2 und 6 wesentlich, um ein geschlossenes Tableau zu erhalten.

Das Beispiel zeigt, dass es bei systematischen Tableaux darauf ankommen wird, dass wir γ -Regeln “genügend oft” anwenden, dabei aber andere mögliche Regelanwendungen nicht vernachlässigen.

Wir nehmen im Folgenden an, dass die zur Verfügung stehenden Parameter eine feste Reihenfolge haben, und entsprechend, dass die in einem Zweig vorkommenden Konstanten (einschließlich Parametern) eine feste Reihenfolge haben.

Definition B.4 Ein *systematisches Tableau* wird durch Iteration der folgenden Schritte entwickelt:

*systematisches
Tableau*

- (1) Wähle die höchste nicht-atomare Formel, auf die noch keine Regel angewendet wurde. Wenn es mehrere gibt, wähle die linkeste.
- (2) Wenn auf alle Formeln eine Regel angewendet wurde, wähle das höchste und linkeste γ aus, das die wenigsten Regelanwendungen erfahren hat.
Falls es kein γ gibt, beende das Verfahren.
- (3) Wende auf die ausgewählte Formel die passende Regel in allen nicht geschlossenen Zweigen an, die von der Formel ausgehen.
 - Wenn es sich um ein δ handelt, wähle $\delta(a)$ derart, dass a der erste im jeweiligen Zweig noch nicht vorkommende Parameter ist.
 - Wenn es sich um ein γ handelt, wähle $\gamma(a)$ derart, dass a die erste im jeweiligen

Zweig vorkommende Konstante (einschließlich Parameter) ist, so dass $\gamma(a)$ im Zweig noch nicht vorkommt.

Falls eine solche Konstante (bzw. Parameter) nicht existiert, dann wähle aus der Reihe der Parameter den ersten, der noch nicht im Zweig vorkommt.

Erhöhe die Zahl der Regelanwendungen auf diese γ -Formel um 1.

Ein nicht-geschlossenes systematisches Tableau ist endlich, falls es keine γ -Formel enthält; andernfalls ist es unendlich. Wir werden beweisen, dass jeder nicht-geschlossene Zweig eines systematischen Tableaus ein Gegenmodell liefert. Wir veranschaulichen dies zunächst anhand zweier Beispiele.

Beispiele. (i) Systematisches Tableau für $\exists xP(x) \rightarrow \forall xP(x)$:

1. $\neg(\exists xP(x) \rightarrow \forall xP(x))$
2. $\exists xP(x)$ ($\neg \rightarrow$, 1)
3. $\neg\forall xP(x)$ ($\neg \rightarrow$, 1)
4. $P(a)$ (\exists , 2)
5. $\neg P(b)$ ($\neg\forall$, 3)

Das Tableau ist endlich und nicht geschlossen. (Das Tableau könnte auch durch erneute Anwendungen der δ -Regeln (\exists) und ($\neg\forall$) auf die Zeilen 2 und 3 nicht geschlossen werden, da stets ein neuer Parameter gewählt werden müsste.)

Man erhält ein Gegenmodell $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ mit endlichem Gegenstandsbereich, wobei wir die Parameter a und b selbst als Gegenstände verwenden:

- $M = \{a, b\}$,
- $\mathcal{I}(P) = \{a\}$.

(ii) Systematisches Tableau für $\forall x\exists yQ(x, y) \rightarrow \exists y\forall xQ(x, y)$:

1. $\neg(\forall x\exists yQ(x, y) \rightarrow \exists y\forall xQ(x, y))$
- Zähler₁: 2 2. $\forall x\exists yQ(x, y)$ ($\neg \rightarrow$, 1)
- Zähler₂: 2 3. $\neg\exists y\forall xQ(x, y)$ ($\neg \rightarrow$, 1)
4. $\exists yQ(a_1, y)$ (\forall , 2) Zähler₁ +1
5. $\neg\forall xQ(x, a_1)$ ($\neg\exists$, 3) Zähler₂ +1
6. $Q(a_1, a_2)$ (\exists , 4)
7. $\neg Q(a_3, a_1)$ ($\neg\forall$, 5)
8. $\exists yQ(a_2, y)$ (\forall , 2) Zähler₁ +1
9. $Q(a_2, a_4)$ (\exists , 8)
10. $\neg\forall xQ(x, a_2)$ ($\neg\exists$, 3) Zähler₂ +1
11. $\neg Q(a_5, a_2)$ ($\neg\forall$, 10)
- ⋮

Das Gegenmodell zu $\forall x\exists yQ(x, y) \rightarrow \exists y\forall xQ(x, y)$ ist gegeben durch:

- $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$,
- $\mathcal{I}(Q) = \{\langle a_1, a_2 \rangle, \langle a_2, a_4 \rangle, \langle a_3, a_6 \rangle, \dots\}$.

Man spricht auch von *Termmodellen*, da der Gegenstandsbereich M aus Termen (hier: *Termmodell* Konstanten, bzw. Parameter) besteht.

Theorem B.5 Es gibt eine abzählbare Menge K von Konstanten (einschließlich Parametern), so dass für jeden nicht-geschlossenen Zweig S in einem systematischen Tableau gilt:

- (H1) Für kein Atom A ist sowohl A als auch $\neg A$ in S .
- (H2) Wenn α in S ist, dann sind α_1 und α_2 in S , sofern $\alpha \neq \neg\neg A$.
Falls $\alpha \equiv \neg\neg A$: Wenn α in S ist, dann ist auch α_1 in S .
- (H3) Wenn β in S ist, dann ist β_1 oder β_2 in S .
- (H4) Wenn γ in S ist, dann ist $\gamma(a)$ in S für jede Konstante (bzw. Parameter) a in K .
- (H5) Wenn δ in S ist, dann ist $\delta(a)$ in S für mindestens einen Parameter a in K .

Eine Menge von geschlossenen Formeln mit diesen Eigenschaften wird als *Hintikka-Menge* bezeichnet (nach Jaakko Hintikka, 1927–2015). *Hintikka-Menge*

Beweis. Ergibt sich aus der Konstruktion systematischer Tableaux gemäß Definition B.4. QED

Bei der einem Zweig S entsprechenden Hintikka-Menge wird lediglich von der Reihenfolge der Formeln im Zweig abstrahiert. Auf die Reihenfolge kommt es im Folgenden jedoch nicht an, und wir nennen die Menge ebenfalls S .

Theorem B.6 Für jede Hintikka-Menge S gibt es ein Modell $\mathfrak{M} = \langle K, \mathcal{I} \rangle$ mit $\mathfrak{M} \models S$.

Beweis. $\mathfrak{M} = \langle K, \mathcal{I} \rangle$ sei wie folgt definiert:

- K ist die Menge der Konstanten (einschließlich Parametern);
- $\mathcal{I}(a) = a$ für jede Konstante (bzw. Parameter) $a \in K$;
- Für n -stellige Relationszeichen R gelte:

$$\mathcal{I}(R) = \{ \langle a_1, \dots, a_n \rangle \mid a_i \in K \} \iff R(a_1, \dots, a_n) \in S$$

Für Atome A gilt dann: $\mathfrak{M} \models A \iff A \in S$.

Aufgrund der Eigenschaften der Hintikka-Menge S folgt per (Wertverlaufs-)Induktion über dem Rang der Formeln in S , dass $\mathfrak{M} \models S$ gilt (d. h. für alle Formeln $A \in S$ gilt $\mathfrak{M} \models A$ für ein Modell \mathfrak{M}).

Den *Rang* einer Formel definieren wir hier so, dass sowohl Atome A als auch deren Negation $\neg A$ den Rang 0 haben. Hat eine Formel B Rang r_1 und eine Formel C Rang r_2 , so haben die Formeln $B \wedge C$, $B \vee C$ und $B \rightarrow C$ den Rang $r_1 + r_2 + 1$, die Formeln $\forall x B$ und $\exists x B$ haben den Rang $r_1 + 1$, und für nicht-atomare Formeln B habe $\neg B$ den Rang $r_1 + 1$. Durch diese Definition ist gewährleistet, dass die Konklusionen einer Regel einen geringeren Rang haben als die Prämisse. *Rang*

Nun nehmen wir an, dass alle Formeln in S mit Rang kleiner n in \mathfrak{M} gelten. Wir betrachten eine Formel A in S mit Rang n :

- Angenommen, A ist eine α - oder eine γ -Formel. Aufgrund (H2) oder (H4) sind α_1 , α_2 oder $\gamma(a)$, für alle a , ebenfalls in S . Da der Rang von α_1 , α_2 und $\gamma(a)$ jeweils kleiner n ist, gelten diese Formeln nach Induktionsannahme in \mathfrak{M} . Damit gilt auch $\mathfrak{M} \models \alpha$, bzw. $\mathfrak{M} \models \gamma$.
- Analog für den Fall, dass A eine β - oder δ -Formel ist; verwende (H3) bzw. (H5).

Somit gilt $\mathfrak{M} \models S$. QED

Theorem B.7 (Vollständigkeit) Sei A eine geschlossene Formel. Wenn $\models A$, dann gibt es einen Tableaubeweis für A .

Beweis. Angenommen, es gibt keinen Tableaubeweis für A . Dann gibt es kein geschlossenes Tableau, das mit $\neg A$ beginnt. Damit gibt es insbesondere auch kein geschlossenes systematisches Tableau, das mit $\neg A$ beginnt. Also hat jedes mit $\neg A$ beginnende systematische Tableau einen nicht-geschlossenen Zweig. Da es sich um ein systematisches Tableau handelt, entspricht einem solchen Zweig eine Hintikka-Menge S . Nach Theorem B.6 gibt es dann ein Modell \mathfrak{M} mit $\mathfrak{M} \models S$. Da $\neg A \in S$, gilt insbesondere $\mathfrak{M} \models \neg A$, also $\mathfrak{M} \not\models A$, und damit $\not\models A$. QED

- Bemerkungen.** (i) Die systematische Entwicklung eines Tableaus für A liefert entweder einen Beweis oder ein Gegenmodell für A . Man weiß jedoch i. A. nach endlich vielen Schritten noch nicht, ob sich der eine oder der andere Fall ergibt. Falls A allgemeingültig ist, liefert die systematische Tableaumentwicklung einen Beweis für A . Ob A allgemeingültig ist, ist i. A. nicht nach endlich vielen Schritten entscheidbar. Quantorenlogische Allgemeingültigkeit ist mittels systematischer Tableaux *semi-entscheidbar*.
- (ii) Zudem kann man zeigen, dass es auch kein anderes Verfahren geben kann, das für beliebige Formeln A entscheidet, ob A allgemeingültig ist oder nicht. Die Quantorenlogik ist unentscheidbar. (Im Unterschied zur (klassischen) Aussagenlogik, wo z. B. mit dem Wahrheitstafelverfahren ein Entscheidungsverfahren für Allgemeingültigkeit vorliegt. Die intuitionistische Aussagenlogik ist ebenfalls entscheidbar.)
- (iii) Der Schluss von der Nicht-Abschließbarkeit eines Tableaus auf die Existenz eines nicht-geschlossenen Zweigs beruht auf dem *Lemma von König*: Ein endlich erzeugter Baum mit unendlich vielen Knoten hat mindestens einen unendlichen Zweig.

Literatur

- P. Blackburn, M. de Rijke & Y. Venema (2001), *Modal Logic*. Cambridge University Press.
- A. Chagrov & M. Zakharyashev (1997), *Modal Logic*. Oxford: Clarendon Press.
- M. D'Agostino, D. M. Gabbay, R. Hähnle & J. Posegga (Hrsg.) (1999), *Handbook of Tableau Methods*. Dordrecht: Kluwer.
- M. Dummett (2000), *Elements of Intuitionism*, 2nd edition. Oxford: Clarendon Press.
- M. Fitting & R. L. Mendelsohn (1998), *First-Order Modal Logic*. Dordrecht: Kluwer.
- U. Friedrichsdorf (1992), *Einführung in die klassische und intensionale Logik*. Wiesbaden: Vieweg.
- D. Jacquette (Hrsg.) (2002), *A Companion to Philosophical Logic*. Oxford: Blackwell.
- J. W. Garson (2013), *Modal Logic for Philosophers*. Cambridge University Press.
- G. Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schließen*, *Mathematische Zeitschrift* **39** (1935), 176–210, 405–431.
- R. Girle (2009), *Modal Logics and Philosophy*, 2nd edition. Durham: Acumen.
- V. Glivenko (1929), *Sur quelques points de la logique de M. Brouwer*, *Bulletin de la Classe des sciences, Académie royale de Belgique, série 5*, **15**, 183–188.
- L. Goble (Hrsg.) (2001), *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*. Oxford: Blackwell.
- K. Gödel (1932), *Zum intuitionistischen Aussagenkalkül*, *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien* **69**, 65–66. (Siehe auch S. Feferman et al. (Hrsg.), *Kurt Gödel, Collected Works, Volume I, Publications 1929–1936*. Oxford University Press, 1986; S. 222–224.)
- A. Heyting (1971), *Intuitionism. An Introduction*, 3rd edition. Amsterdam: North-Holland.
- G. E. Hughes & M. J. Cresswell (1996), *A New Introduction to Modal Logic*. London: Routledge.
- L. Humberstone (2011), *The Connectives*. Cambridge, MA: MIT Press.
- S. A. Kripke (1965), *Semantical analysis of intuitionistic logic*. In: J. Crossley & M. A. E. Dummett (Hrsg.), *Formal Systems and Recursive Functions*. Amsterdam: North-Holland. S. 92–130.
- P. Mancosu (Hrsg.) (1998), *From Brouwer to Hilbert*. Oxford University Press.
- J. C. C. McKinsey (1939), *Proof of the independence of the primitive symbols of Heyting's calculus of propositions*, *Journal of Symbolic Logic* **4**, 155–158.
- T. Piecha (2014), *Philosophische Logik: Ausgewählte Themen*, Vorlesungsskript (SS14), Universität Tübingen. <http://www.uni-tuebingen.de/en/100745>.

- T. Piecha (2015), *Einführung in die Logik*, Vorlesungsskript, Universität Tübingen. <http://www.uni-tuebingen.de/en/100745>.
- D. Prawitz, *Natural Deduction. A Proof-Theoretical Study*, Almqvist & Wiksell, 1965. Neuauflage 2006, Dover Publications.
- G. Priest (2008), *An Introduction to Non-Classical Logic*, Cambridge University Press.
- P. Schroeder-Heister (2008), *Einführung in die Logik*, Vorlesungsskript, Universität Tübingen. <http://www.uni-tuebingen.de/en/30440>.
- R. M. Smullyan (1995), *First-Order Logic*. New York: Dover Publications.
- R. M. Smullyan (2009), *Logical Labyrinths*. Wellesley, MA: A K Peters.
- A. Troelstra & D. van Dalen (1988), *Constructivism in Mathematics. An Introduction*, Vol. I. Amsterdam: North-Holland.
- D. van Dalen, *Logic and Structure*, 5th ed., Springer, 2013.
- M. Wajsberg (1938), *Untersuchungen über den Aussagenkalkül von A. Heyting*, *Wiadomości Matematyczne* **46**, 45–101.

Sachverzeichnis

- abgeleitete Regel, 50
- ableitbar, 21
- ableitbar in NI, 20
- ableitbar in NK, 12
- Ableitbarkeit, 53
- Ableitung, 12, 20, 50
 - in Normalform, 25
 - normale, 25
- Äquivalenzrahmen, 47
- allgemeingültig, 9
- Allgemeingültigkeit, 64
 - aussagenlogisch, 9
 - modal quantorenlogisch, 71, 74
 - modallogisch, 42
- Alphabet, 6, 61
- analytisches Tableau
 - aussagenlogisches, 54
- Annahme
 - global, 60
 - lokal, 60
- Aussagenlogik
 - Semantik, 8
 - Syntax, 6
- Barcansche Formeln, 75
- Beseitigungsregel, 11, 19
- Beweis
 - (nicht) konstruktiver, 17
- beweisbar in NI, 20
- beweisbar in NK, 12
- Beweisinterpretation, 17
- Bewertung, 8, 33, 34, 40
- BHK-Interpretation, 17
- Bindungsstärke, 6, 40, 61
- Bivalenzprinzip, 11, 78
- de dicto, 68, 81
- de re, 68, 81
- Designator
 - nicht-starrer, 79
 - starrer, 80
- Disjunktionseigenschaft, 25
- Einführungsregel, 11, 19
- erfüllbar, 9
- Ersetzungstheorem, 52
- Erweiterung von \mathfrak{M} , 87
- euklidisch, 47
- ex contradictione quodlibet sequitur, 20
- ex falso quodlibet sequitur, 20
- ex quodlibet verum sequitur, 20
- Existenzrelativierung, 77
- Existenzprädikat, 77
- Folgerungsrelationen, 47
- forces, 34
- Forcing-Relation, 34
- Formel, 81
 - aussagenlogisch, 6
 - geschlossen, 62
 - modallogisch, 40
 - offen, 62
 - quantorenlogisch, 61
- funktionale Vollständigkeit, 9
- Gödel–Dummett-Logik, 26
- gültig in k , 34
- Gültigkeit
 - im Modell, 35, 41, 64, 71, 74
 - im Rahmen, 41, 71, 74
 - in \mathfrak{M} in w , 71
 - in \mathfrak{M} in w unter v , 70, 74, 78, 81
 - in \mathfrak{M} in der Welt u , 41
 - in \mathfrak{M} unter v , 64
 - in h , 9
 - S -gültig, 47
- Gegenstandsbereich, 62
 - von Modell, 74
 - von Rahmen, 73
- Gentzen-Übersetzung, 29
- Gleichheit, 78
- Glivenkos Theorem, 31
- Harropsche Regel, 26
- Hauptkonjektiv, 8
- Hilberttypkalkül
 - aussagenlogischer, 83
 - für K , 50
 - für Standardmodallogiken, 52
- Hintikka-Menge, 90
- idealisierte Mathematiker, 32
- Import-Export-Theorem, 10, 46
- Individuenparameter, 64
- Individuenbereich, 62
- inkonsistent, 9

- intermediäre Logiken, 26
- Interpretation
 - modallogisch, 69, 73
 - quantorenlogisch, 62
- Intuitionismus, 16
- intuitionistische Logik, 16, 19
 - Verhältnis zu klassischer Logik, 28
- intuitionistischen Logik, 10
- Inversionsprinzip, 13

- Kalkül des natürlichen Schließens
 - NI, 19
 - NK, 11
- Kalkül NM, 20
- Kennzeichnungen, 78
- Klammerersparnis, 6
- klassische Logik, 11
- Knoten, 34
- Kompaktheit, 46
- konservative Erweiterung, 44, 73
- konsistent, 9
- kontingent, 9
- kontradiktorisch, 9
- Kontraktion, 21
- konverse Barcansche Formeln, 76
- Korrektheit, 15, 37, 53, 60
- kreatives Subjekt, 32
- Kreisel–Putnam-Formel, 26
- Kreisel–Putnam-Logik, 26
- Kripke-Gültigkeit, 35
- Kripke-Modell, 33
- Kripke-Semantik, 32

- Lemma von König, 91
- Logik
 - intuitionistische, 19
 - klassische, 11
- logisch äquivalent, 10, 46
- logische Folgerung
 - aussagenlogisch, 10
 - global, 45
 - intuitionistisch, 37
 - lokal, 45
 - modal quantorenlogisch, 75
 - modallogisch, 46
 - quantorenlogisch, 64

- mögliche Welten, 34
- Mögliche-Welten-Semantik, 32
- maximal, 24

- maximales Formelvorkommen, 24
- Maximalformel, 24
- minimale Logik, 20
- Mintssche Regel, 27
- Modaloperatoren, 40
- Modallogik
 - für konstante Gegenstandsbereiche, 69
 - für variierende Gegenstandsbereiche, 72
 - K, D, T, B, K4, S4, S5, 48
 - nicht-normale, 53
 - normale, 52
- Modell, 33, 40, 62
 - beruht auf Rahmen, 46
 - nicht-starr, 78
 - quantorenlogisch modal, 70, 74
- Modus Ponens, 50
- Monotonie, 32, 46
- Monotoniebedingung, 34

- negative Formel, 28
- negative translations, 29
- Nezessitationsregel, 50
- nicht-starre Interpretation, 78
- normal, 25
- normale Ableitung, 25
- Normalform, 25
 - einer Ableitung, 25

- partielle Ordnung, 32
- partiellen Ordnungsrelation, 33
- Peircesches Gesetz, 25
- Persistenz, 32
- Prädikatabstraktion, 81

- Quantifikation
 - aktualistisch, 73
 - possibilistisch, 73
- Quantorenlogik
 - Semantik, 62
 - Syntax, 61

- Rahmen, 33, 40
 - erweiterter, 69, 73
 - hat Relationseigenschaft, 46
 - universell, 48
- Rahmeneigenschaft, 46
- Rang, 90
- reductio ad absurdum, 14

Reduktionen, 24
 \rightarrow -Reduktion, 24
 reflexiv, 46
 Regel
 ableitbare, 21
 zulässige, 22
 Regularitätsregel, 50
 Relevanzlogik, 21

 Schnittregel, 51
 schwaches Gegenbeispiel, 17, 33
 semi-entscheidbar, 91
 Separationseigenschaft, 25
 seriell, 46
 Signatur, 54
 signierte Formel, 54
 Standardmodallogiken, 48
 Struktur, 33, 62
 Strukturbaum, 7
 strukturell unvollständig, 27
 strukturell vollständig, 27
 substrukturelle Logiken, 21
 symmetrisch, 46
 syntaktische Gleichheit, 7
 systematisches Tableau, 88

 Tableau für A , 54
 Tableaubeweis, 55
 Tableaubableitung, 60
 Tableaurechnung
 für S , 59
 für K , 55
 modal quantorenlogisch, 66
 quantorenlogisch, 65
 Tableaux mit Annahmen, 59
 tautologisch, 9
 Teilformel, 7
 echte, 8
 unmittelbare, 7
 Teilformeleigenschaft, 25
 Termebelegung, 63, 78
 Termmodell, 89
 tertium non datur, 17
 transitiv, 46

 Übersetzung \mathcal{E} , 29
 unabhängig, 27
 unerfüllbar, 9
 Universum, 62
 unmittelbare Teilformel, 7

 Variablenbelegung, 63, 74
 x -Variante, 63
 Variablenvorkommen
 frei, 61
 gebunden, 61
 Variante, 63
 Verdünnung, 21
 Vollständigkeit, 15, 37, 53, 60
 Vorkommen eines Zeichens, 61

 Wahrheitsdefiniertheit, 11
 wahrheitsfunktional, 41
 Wahrheitsfunktionalität, 11
 Wahrheitskonservierung, 10
 Wahrheitswert, 8
 Widerspruchsregel, 12, 19
 Wirkungsbereich, 62

 x -Variante, 63, 74
 von v in w , 74

 zulässig, 22
 Zustände, 34
 Zustandsmenge, 33