Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister **Blatt 8**

Aufgabe 1 (6 Punkte)

a) Zeigen Sie: Falls $\models \varphi$, dann $\models \forall x\varphi$.

b) Zeigen Sie, daß die Behauptung "$\mathfrak{A} \models \varphi$ oder $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$" nicht allgemein gilt, wenn φ freie Variablen enthält.

c) Zeigen Sie, daß die Behauptung "$\models \varphi$ oder $\models \neg\varphi$" nicht einmal dann allgemein gilt, wenn φ eine Aussage, d.h. eine Formel ohne freie Variablen ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie durch semantische Überlegungen:

a) $\models \exists x\varphi \leftrightarrow \varphi$, falls $x \notin FV(\varphi)$

b) $\models \forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie unter Verwendung von Umformungen gemäß bereits bewiesener Theoreme:

a) $\models \exists x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi \vee \exists x\psi$

b) $\models (\exists x\varphi \to \psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \to \psi)$, falls $x \notin FV(\psi)$

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Formen Sie folgende Formel schrittweise in pränexe Normalform um:

$$\neg(\exists x\varphi(x,y) \wedge \forall y(\psi(y) \to \exists x\sigma(x,y)))$$

Aufgabe 5 (2 Zusatzpunkte)

Zeigen Sie, daß folgende Formel allgemeingültig ist:

$$\exists y(\varphi(y) \to \forall x\varphi(x))$$