Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik — Blatt 3

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister — **WS 2008/09**

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Geben Sie zu der Formel $\neg(p \vee q) \wedge r$ eine äquivalente Formel an, in der als einziger Junktor der Shefferstrich $|$ vorkommt.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Konstruieren Sie nach dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren mit Hilfe der Junktoren $\wedge$, $\vee$, $\neg$ und $\perp$ eine Formel, die den ternären Junktor \$ ausdrückt, welcher durch folgende Wahrheitstafel gegeben ist:

ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	$f_\$(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

Aufgabe 3 (1 Punkt)

Zeigen Sie, daß $\{\wedge, \leftrightarrow\}$ nicht funktional vollständig ist.

Aufgabe 4 (2+2+2+2 Punkte)

Zu jeder Formel, die nur Junktoren aus $\{\vee, \wedge, \neg\}$ enthält, sei ϕ^d diejenige Formel, die aus ϕ durch Vertauschung von $\wedge$ und $\vee$ entsteht (vgl. Definition 4.9). Falls v eine Belegung ist, dann sei die Belegung v^* durch $v^*(p) = 1 - v(p)$ definiert. Zeigen Sie:

a) $[\![\phi^d]\!]_{v^*} = 1 - [\![\phi]\!]_v$

b) $\phi \models \psi$ genau dann, wenn $\psi^d \models \phi^d$

c) $\phi^d \dashv\models \neg\phi$, falls entweder ϕ oder $\neg\phi$ allgemeingültig ist

d) Die Umkehrung von c) gilt nicht (Gegenbeispiel!)

Aufgabe 5 (4 Zusatzpunkte)

Eine n-stelliger Junktor \$ mit Wahrheitsfunktion $f_\$$ heiße *selbstdual* genau dann, wenn für alle $x_1, \ldots, x_n$ gilt:

$$f_\$(x_1^*, \ldots, x_n^*) = f_\$(x_1, \ldots, x_n)^*.$$

Dabei sei $0^* \stackrel{def}{=} 1$ und $1^* \stackrel{def}{=} 0$.

Zeigen Sie, dass eine Menge, welche nur selbstduale Junktoren enthält, nicht funktional vollständig sein kann.