Übungen zur Vorlesung Mathematischen Logik — Blatt 2

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister — **SS 2012**

Aufgabe 5 (1+1+1 Punkte)

a) Geben Sie eine rekursive Definition der Länge $l(\phi)$ (Anzahl der vorkommenden Zeichen) einer Formel $\phi \in PROP$ an und bestimmen Sie dann die Länge der Formel $(q \to \neg p \wedge q) \leftrightarrow q$. (Hinweis: Zur Orientierung siehe Skript Definition 1.7, 1.8 und 1.9. Die nicht explizit hingeschriebenen Klammern müssen mitgezählt werden!)

b) Geben Sie eine induktive Definition der Menge $PROP_{\neg}$ aller Formeln, in denen höchstens die Negation als Junktor vorkommt, an. Halten Sie sich dabei an die Definition 1.2 aus dem Skript.

c) Zeigen Sie mit dem zugehörigen Induktions-Prinzip, dass $\forall \phi \in PROP_{\neg} \exists n \in \mathbb{N} : l(\phi) = 3n + 1$.

Aufgabe 6 (2+1 Punkte + 1 Zusatzpunkt)

Die Menge $PROP_{\wedge,\vee}$ ist die Menge aller Formeln, in denen höchstens die Konjunktion und die Disjunktion als Junktor vorkommen.

a) Geben Sie zwei Belegungen v, w an, so dass alle Formeln aus $PROP_{\wedge,\vee}$ mit 0 bzw. mit 1 bewertet werden. Zeigen Sie dieses dann mit dem zugehörigen Induktions-Prinzip.

b) Welche Formeln aus $PROP_{\wedge,\vee}$ sind Tautologien, welche erfüllbar, welche kontingent und welche kontradiktorisch?

c) Welche Formeln aus $PROP_{\neg}$ sind Tautologien, welche erfüllbar, welche kontingent und welche kontradiktorisch?

Aufgabe 7 (1+1+1+1 Punkte)

Prüfen Sie mithilfe von Wahrheitstafeln, ob die folgenden Formeln und Formelschemata Tautologien, Kontradiktionen oder kontingente Formeln sind.

(a) $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi$ (b) $\neg(\neg\phi \vee \phi \leftrightarrow \neg \bot)$

(c) $(p_1 \to p_2) \vee p_3 \to \bot$ (d) $(\phi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\phi)$

(Halten Sie sich beim Aufbau der Wahrheitstafeln an das Beispiel auf S.15 im Skript; beachten Sie insbesondere eine sinnvolle Reihenfolge der Zeilen.)

Aufgabe 8 (1+2 Punkte)

Beweisen Sie:

a) Wenn $\varphi \models \psi$ und $\psi \models \rho$, dann $\varphi \models \rho$.

b) $[\![\varphi \to \psi]\!]_v = 1$ genau dann, wenn $[\![\varphi]\!]_v \leq [\![\psi]\!]_v$.

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Beweisen Sie: $\varphi_1 \dashv\models \varphi_2 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1[\psi/p] \dashv\models \varphi_2[\psi/p]$

Abgabe der Aufgaben am Do. 10.05.2012 nach der Vorlesung
oder als PDF auf der Webseite der Veranstaltung.