

Versuchen Sie, die folgenden Aufgaben möglichst ohne Hilfsmittel in 45 Minuten zu lösen. Sie sollten dabei mindestens 25 von insgesamt 50 Punkten erreichen.

Aufgabe 1 (2 + 8 Punkte)

Wir betrachten die Formel $p \rightarrow q \vee (p \wedge \neg r)$.

- (a) Geben Sie die vollständig geklammerte Ausgangsformel an.
- (b) Bestimmen Sie unter Verwendung einer Wahrheitstafel, ob die Formel allgemeingültig, erfüllbar, unerfüllbar oder kontingent ist.

Lösung

(a) $(p \rightarrow (q \vee (p \wedge \neg r)))$

(b)

p	q	r	$(p \rightarrow (q \vee (p \wedge \neg r)))$			
w	w	w	w	w	f	f
w	w	f	w	w	w	w
w	f	w	f	f	f	f
w	f	f	w	w	w	w
f	w	w	w	w	f	f
f	w	f	w	w	f	w
f	f	w	w	f	f	f
f	f	f	w	f	f	w

Die Formel ist erfüllbar und kontingent.

Hinweis: Den Ergebnissatz nicht vergessen!

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Zeigen Sie: $\neg(A \wedge B) \models \neg A \vee \neg B$.

Lösung

Hinweis: In der Aufgabe wird nicht verlangt, dass die Aussage mit einer vorgegebenen Methode gezeigt werden muss; man wählt also eine möglichst einfache, ggf. mit einem kurzen Kommentar.

Aufgrund des Import-Export-Theorems gilt:

$$\neg(A \wedge B) \models \neg A \vee \neg B \text{ genau dann, wenn } \models \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B.$$

Nachweis der rechten Seite mittels Wahrheitstafel:

A	B	$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$			
w	w	f	w	w	f
w	f	w	f	w	w
f	w	w	f	w	w
f	f	w	f	w	w

In der Hauptspalte kommt nur der Wahrheitswert w vor. Also ist das Formelschema $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ allgemeingültig. Somit gilt auch die linke Seite.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Geben Sie eine disjunktive Normalform für die Formel $((p \rightarrow (q \wedge \neg p)) \vee p) \leftrightarrow q$ an.

Lösung

Konstruktion der DNF anhand einer Wahrheitstafel:

p	q	$((p \rightarrow (q \wedge \neg p)) \vee p) \leftrightarrow q$					
w	w	f	f	f	w	w	$(p \wedge q)$ $\vee (\neg p \wedge q)$
w	f	f	f	f	w	f	
f	w	w	w	w	w	w	
f	f	w	f	w	w	f	

Die DNF ist $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$.

Hinweis: Die Aufgabe könnte auch per Äquivalenzumformungen gelöst werden. Die Konstruktion der DNF per Wahrheitstafel ist aber weniger fehleranfällig.

Aufgabe 4 (5 + 5 Punkte)

(a) Drücken Sie $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ unter alleiniger Verwendung von \neg und \wedge aus.

(b) Drücken Sie $p \vee \neg(p \wedge q)$ unter alleiniger Verwendung von \neg und \rightarrow aus.

Lösung

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad (p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) &\equiv (p \wedge q) \rightarrow (\neg\neg p \vee \neg\neg q) && \text{(doppelte Negation)} \\
 &\equiv (p \wedge q) \rightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q) && \text{(De Morgan)} \\
 &\equiv \neg(p \wedge q) \vee \neg(\neg p \wedge \neg q) && (A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B) \\
 &\equiv \neg((p \wedge q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)) && \text{(De Morgan)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad p \vee \neg(p \wedge q) &\equiv \neg(p \wedge q) \vee p && \text{(Kommutativität von } \vee \text{)} \\
 &\equiv (p \wedge q) \rightarrow p && (\neg A \vee B \equiv A \rightarrow B) \\
 &\equiv \neg p \rightarrow \neg(p \wedge q) && \text{(Kontraposition)} \\
 &\equiv \neg p \rightarrow (\neg p \vee \neg q) && \text{(De Morgan)} \\
 &\equiv \neg p \rightarrow (p \rightarrow \neg q) && (\neg A \vee B \equiv A \rightarrow B)
 \end{aligned}$$

Hinweis: Auf die Kommentare kann verzichtet werden; sie können aber helfen, sich die Umformungsschritte noch einmal bewusst zu machen.

Aufgabe 5 (4 + 6 Punkte)

Zeigen Sie durch Angabe einer Ableitung im Kalkül NK:

(a) $\vdash \neg A \rightarrow \neg\neg\neg A$

(b) $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash (A \wedge B) \rightarrow C$

Lösung

$$\begin{array}{l}
 \text{(a)} \quad \frac{[\neg\neg A]^1 \quad [\neg A]^2}{(\rightarrow B)} \\
 \quad \frac{\perp}{\neg\neg\neg A} (\rightarrow E)^1 \\
 \quad \frac{\neg\neg\neg A}{\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A} (\rightarrow E)^2
 \end{array}$$

$$(b) \quad \frac{\frac{A \rightarrow (B \rightarrow C)}{B \rightarrow C} \quad \frac{[A \wedge B]^1}{A} (\wedge B)}{\frac{C}{(A \wedge B) \rightarrow C} (\rightarrow E)^1} \quad \frac{[A \wedge B]^1}{B} (\wedge B)$$

Aufgabe 6 (2 + 4 Punkte)

- (a) Was bedeutet Korrektheit des Kalküls NK?
- (b) Nun ersetzen wir im Kalkül NK die Regeln für die Konjunktion durch die beiden Regeln

$$\frac{A}{A \wedge B} (\wedge E)' \quad \text{und} \quad \frac{A \wedge B}{B} (\wedge B)'$$

Zeigen Sie, dass der resultierende Kalkül nicht korrekt ist.

Lösung

- (a) Korrektheit von NK bedeutet: Wenn $\Gamma \vdash A$, dann $\Gamma \models A$.
(In Worten: Wenn eine Formel A im Kalkül NK aus Annahmen der Menge Γ abgeleitet werden kann, dann folgt A logisch aus den Prämissen in Γ .)
- (b) Die Ableitung

$$\frac{\frac{A}{A \wedge B} (\wedge E)' \quad \frac{A \wedge B}{B} (\wedge B)'$$

zeigt $A \vdash B$.

Angenommen der Kalkül ist korrekt, dann gilt auch $A \models B$, für beliebige Formeln A und B . Betrachte den Fall $p \models q$. Die Bewertung h mit $h \models p$ und $h \not\models q$ ist ein Gegenbeispiel, d. h. $p \not\models q$. Somit $A \not\models B$. Also kann der resultierende Kalkül nicht korrekt sein.