Mathematische Logik I

— Foliensatz 3 —

Dr. Michael Arndt

Wintersemester 2014/15

Substitution

Definition 1 (Substitution)

Es seien $\phi, \psi \in$ PROP, und es sei $p \in \mathrm{AV}$.

Die Formel $\phi[\psi/p]$ ist das Resultat der *Substitution* (Ersetzung) sämtlicher Vorkommen der Aussagevaribalen p in der Formel ϕ durch die Formel ψ.

Beispiele:

- $(p_0 \rightarrow p_0 \vee p_1)\big[\neg(p_2 \wedge p_1)/p_0\big] \triangleq (\neg(p_2 \wedge p_1) \rightarrow \neg(p_2 \wedge p_1) \vee p_1)$
- $(p_1 \leftrightarrow \bot)\big[\bot/p_1\big] \triangleq (\bot \leftrightarrow \bot)$
- $\neg p_0\big[\neg p_0/p_0\big] \triangleq \neg\neg p_0$
- $(\neg p_0 \wedge \neg p_2)\big[(p_3 \rightarrow \neg p_0)/p_1\big] \triangleq (\neg p_0 \wedge \neg p_2)$

Substitution

Formal ist die Substitution rekursiv definiert:

1. $p_k[\psi/p_l] \mathrel{\widehat{=}}_{\mathrm{def}} \begin{cases} p_k & \text{falls } k \neq l \\ \psi & \text{sonst} \end{cases}$
2. $\bot[\psi/p_l] \mathrel{\widehat{=}}_{\mathrm{def}} \bot$
3. $\neg\phi[\psi/p_l] \mathrel{\widehat{=}}_{\mathrm{def}} \neg\big(\phi[\psi/p_l]\big)$
4. $(\phi_1 \circ \phi_2)[\psi/p_l] \mathrel{\widehat{=}}_{\mathrm{def}} \big(\phi_1[\psi/p_l] \circ \phi_2[\psi/p_l]\big)$

Simultane Substitution

Definition 2 (Simultane Substitution)

Es seien $\phi, \psi_1, \ldots, \psi_n \in \mathrm{PROP}$, und es seien $p_{k_1}, \ldots, p_{k_n} \in \mathrm{AV}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $k_1 \ldots, k_n \in \mathbb{N}$.

Die Formel $\phi[\psi_1/p_{k_1}, \ldots, \psi_n/p_{k_n}]$ ist das Resultat der *simultanen Substitution* aller Aussagevariablen p_{k_i} in der Formel ϕ durch die entsprechende Formel ψ_i $(0 \leq i \leq n)$.

Anstelle der definierten Notation schreiben wir auch $\phi[\psi_1, \ldots, \psi_n/p_1, \ldots, p_n]$ oder kurz $\phi[\vec{\psi}/\vec{p}]$.

Simultane Substitution

Bemerkung:

Das Ergebnis einer simultanen Ersetzung ist im Allgemeinen verschieden von der Hintereinanderausführung derselben Ersetzungen.

Beispiele:

- $(p_1 \wedge p_2)[p_1/p_2]\,[p_2/p_1] \doteq (p_1 \wedge p_1)[p_2/p_1] \doteq (p_2 \wedge p_2)$
- $(p_1 \wedge p_2)[p_1/p_2,\ p_2/p_1] \doteq (p_2 \wedge p_1)$

Simultane Substitution

Bemerkungen:

- Für Substitution und die simultane Substitution können exakte, rekursive Definition angegeben werden, sofern man das Konzept der rekursiven Definition geeignet erweitert.
- Die simultane Substitution durch Hintereinanderausführungen einfacher Substitutionen beschrieben werden.

Substitutionssatz

Theorem 3 (Substitutionssatz)

Seien $\phi, \psi_1, \psi_2 \in \mathsf{PROP}$ *und* $p \in \mathsf{AV}$*. Dann gilt:*

Wenn $\psi_1 \mathrel{=\!\mid\!\models} \psi_2$*, dann* $\phi[\psi_1/p] \mathrel{=\!\mid\!\models} \phi[\psi_2/p]$*.*

Bemerkungen:

- Das Theorem besagt, dass die Ersetzung von Teilaussagen durch logisch äquivalente Aussagen den Wahrheitswert der Gesamtaussage nicht verändert.
- Eine alternative Formulierung lautet:

  Wenn $\models \psi_1 \leftrightarrow \psi_2$*, dann* $\models \phi[\psi_1/p] \leftrightarrow \phi[\psi_2/p]$*.*

Substitutionssatz

Beweis:

Durch Induktion über der Struktur von ϕ.

Es seien $\psi_1, \psi_2 \in \text{PROP}$ gegeben mit $\psi_1 \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \psi_2$, und $p \in AV$.

I. Induktionsanfang:

$\perp$: $\perp[\psi_1/p] \doteq \perp \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \perp \doteq \perp[\psi_2/p]$.

p_n: Falls $p \doteq p_n$, dann gilt nach Voraussetzung über ψ_1 und ψ_2:
$p_n[\psi_1/p] \doteq \psi_1 \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \psi_2 \doteq p_n[\psi_2/p]$

Ansonsten ist $p \not\doteq p_n$, und damit gilt trivialerweise:
$p_n[\psi_1/p] \doteq p_n \mathrel{=\!\!|\!\!\models} p_n \doteq p_n[\psi_2/p]$

Substitutionssatz

II. Induktionsvoraussetzung:

Es gelte die Behauptung für σ und τ,
d.h. $\sigma[\psi_1/p] \mathrel{\dashv\models} \sigma[\psi_2/p]$ und $\tau[\psi_1/p] \mathrel{\dashv\models} \tau[\psi_2/p]$.

Damit gilt für alle Belegungen v:
$[\![\sigma[\psi_1/p]]\!]_v = [\![\sigma[\psi_2/p]]\!]_v$ sowie $[\![\tau[\psi_1/p]]\!]_v = [\![\tau[\psi_2/p]]\!]_v$.

III. Induktionsschluß:

$\neg\sigma$: Analog zum Fall $\sigma \circ \tau$ unten.

$(\sigma \circ \tau)$: Sei v eine beliebige Belegung. Damit gilt:

$$[\![(\sigma \circ \tau)[\psi_1/p]]\!]_v = f_\circ\big([\![\sigma[\psi_1/p]]\!]_v, [\![\tau[\psi_1/p]]\!]_v\big)$$

$$\overset{(IV)}{=} f_\circ\big([\![\sigma[\psi_2/p]]\!]_v, [\![\tau[\psi_2/p]]\!]_v\big) = [\![(\sigma \circ \tau)[\psi_2/p]]\!]_v$$

Damit $(\sigma \circ \tau)[\psi_1/p] \mathrel{\dashv\models} (\sigma \circ \tau)[\psi_2/p]$.

$\square$